MATEMATICA E STORIA

# La crescita della popolazione

Nella sua opera del 1748 *Introductio in analysin infinitorum*, Eulero propone il seguente problema:
«Se la popolazione di una regione aumenta annualmente di un trentesimo e in un certo momento contava 100 000 abitanti, vorremmo conoscere la popolazione dopo 100 anni».

**a.** Prima di risolvere il problema, fai una stima: quale potrà essere, secondo te, il numero di abitanti dopo 100 anni?

**b.** Interpreta e completa i calcoli seguenti, che consentono di esprimere il numero di abitanti di quella regione dopo un anno: $100\,000 + 100\,000 \cdot \frac{1}{30} = 100\,000 \cdot (\ldots + \ldots) = 100\,000 \cdot \ldots$

**c.** Una volta determinato il numero di abitanti dopo un anno, per quale frazione (maggiore di 1) lo puoi moltiplicare in modo da ottenere la popolazione dopo due anni?

**d.** Per determinare la popolazione dopo 100 anni, ripeterai la precedente moltiplicazione più volte…
Scrivi un'espressione che ti consenta (con l'aiuto di una calcolatrice o di un foglio elettronico) di trovare la soluzione del problema.

## RISOLUZIONE

**b.** $100\,000 + 100\,000 \cdot \frac{1}{30} = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{1}{30}\right) = 100\,000 \cdot \frac{31}{30}$: il numero di abitanti di quella regione dopo un anno sarà 103 333.

**c.** Si può moltiplicare per $\frac{31}{30}$ il numero ottenuto al punto precedente ricavando, per la popolazione dopo due anni, il valore 106 778.

**d.** Per determinare la popolazione $P$ dopo 100 anni, si potrà scrivere: $P = 100\,000\left(\frac{31}{30}\right)^{100} = 2\,654\,874$.

## ESERCIZIO IN PIÙ

Vediamo una sintesi delle proprietà della funzione esponenziale $y = a^z$ attraverso alcune domande. Le risposte si possono anche ritrovare in un paragrafo dell'*Introductio in analysin infinitorum* di Eulero.

Sia $a = 1$; quali valori assume la funzione?

Sia $a > 1$.

- Cosa puoi dire di $a^z$ quando $z$ assume valori sempre maggiori, tendenti verso infinito?
- Quale valore assume $a^z$ se $z = 0$?
- Cosa puoi dire di $a^z$ se $z$ è negativo e assume valori sempre più grandi in valore assoluto, cioè tende a $-\infty$?

Sia $0 < a < 1$.

- Cosa puoi dire di $a^z$ quando $z$ aumenta?
- Cosa puoi dire di $a^z$ quando $z$ diminuisce?

### Risoluzione

Da *Introduction in analysin infinitorum,* libro I, par. 98.
«I valori dell'esponenziale $a^z$ dipendono anzitutto dalla grandezza costante $a$.
Se $a = 1$, allora abbiamo sempre $a^z = 1$, non importa quale valore è assegnato a $z$.
Se $a > 1$, $a^z$ assumerà un valore maggiore se il valore di $z$ è maggiore di quello che aveva inizialmente, e come $z$ va verso infinito così pure $a^z$ aumenta a infinito.
Se $z = 0$, allora $a^z = 1$;
se $z < 0$, allora i valori di $a^z$ diventano minori di 1 e quando $z$ va a $-\infty$, $a^z$ tende a 0.
D'altro canto se $a < 1$, ma è ancora positivo, allora i valori di $a^z$ diminuiscono quando $z$ aumenta al di sopra di 0. L'esponenziale aumenta quando $z$ aumenta nella direzione negativa [cioè tende a $-\infty$ (*N.d.T.*)]. Siccome quando $a < 1$ abbiamo $\frac{1}{a} > 1$, se poniamo $\frac{1}{a} = b$ allora $a^z = b^{-z}$. Per questa ragione possiamo esaminare il caso in cui $a < 1$ ricavandolo dal caso in cui $a > 1$.»