MATEMATICA E ROMPICAPI

La torre di Hanoi

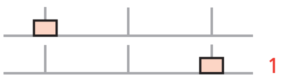
Questo è il famoso gioco della torre di Hanoi.
Riusciresti a spostare i dischi da un paletto a un altro facendo in modo che ogni disco appoggi solo su altri dischi di raggio maggiore del suo? Può esserti d'aiuto il principio di induzione.

LA RISPOSTA

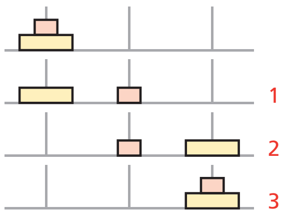
Narra la leggenda che nel grande tempio di Brahma, a Benares, in India, sotto la cupola che segna il centro del mondo, all'inizio dei tempi c'era una torre composta da ben 64 dischi d'oro. Fin da allora i monaci stanno spostando i dischi uno alla volta, seguendo la legge di Brahma: nessun disco può essere messo su un altro più piccolo. Lo spostamento dei dischi è tuttora in corso e non si interrompe mai, né di giorno, né di notte. Quando l'ultimo disco sarà finalmente collocato a formare di nuovo la torre di Brahma, arriverà la fine del mondo.
In realtà il gioco conosciuto come *torre di Hanoi* è stato inventato nel 1883 dal matematico francese Édouard Lucas, e probabilmente anche la leggenda si deve a lui.
Su una tavoletta sono fissate tre aste verticali. Un certo numero di dischi, di raggio decrescente dal basso verso l'alto, sono infilati su un'asta. Lo scopo del gioco è quello di ricostruire la torre su un'altra asta con il minor numero di movimenti possibili, seguendo quest'unica regola: i dischi vanno spostati uno alla volta, facendo sì che a ogni passo ciascun disco appoggi o sulla tavoletta o su altri dischi di raggio maggiore.

Facciamo un po' di pratica.

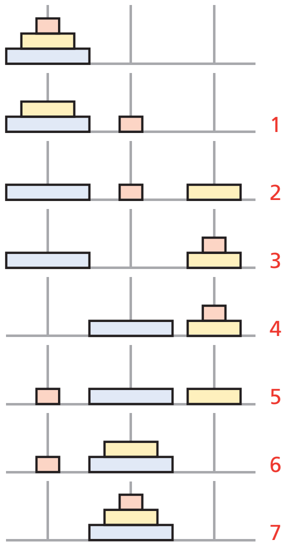
- Se ci fosse un solo disco, basterebbe un movimento per ricostruire la torre.
- Se i dischi fossero 2, basterebbero 3 movimenti per ricostruire la torre.
- Se i dischi fossero 3, servirebbero 7 movimenti per ricostruire la torre.



Torre di Hanoi con un disco



Torre di Hanoi con 2 dischi



Torre di Hanoi con 3 dischi

Quanti movimenti sarebbero necessari se i dischi fossero 4, 5, …, n?
Prima di affrontare il problema con il principio di induzione, cerchiamo una regola ricorsiva per capire quanti sono i movimenti da fare con più dischi.

- Riflettiamo sul caso con 3 dischi; abbiamo fatto:
  - 3 movimenti per ricostruire la parte di torre formata da 2 dischi;
  - un movimento per spostare il disco più grande;
  - 3 movimenti per ricostruire la parte di torre con 2 dischi sopra al disco maggiore.

  Il numero totale di movimenti è quindi $3 + 1 + 3 = 7$.
- Nel caso di una torre con quattro dischi possiamo verificare con un disegno analogo che accorrono:
  - 7 movimenti per ricostruire la parte di torre da 3 dischi;
  - un movimento per spostare il disco più grande;
  - 7 movimenti per ricostruire sopra al disco maggiore la torre da 3 dischi.

  In totale, $7 + 1 + 7 = 15$ movimenti.

Abbiamo dunque visto che:

- con un disco il numero dei movimenti è 1, con $1 = 2^1 - 1$;
- con 2 dischi il numero dei movimenti è 3, con $3 = 2^2 - 1$;
- con 3 dischi il numero dei movimenti è 7, con $7 = 2^3 - 1$;
- con 4 dischi il numero dei movimenti è 15, con $15 = 2^4 - 1$.

Possiamo allora supporre che in generale, per n dischi, il numero dei movimenti necessario sia uguale a $2^n - 1$.
Dimostriamolo per induzione.
La regola è vera per un disco ($n = 1$).
Supponiamo che la regola sia vera per n dischi e verifichiamo che per $n + 1$ dischi dobbiamo compiere $2^{n+1} - 1$ movimenti.

Con $n + 1$ dischi dobbiamo compiere:

- $2^n - 1$ movimenti per ricostruire la parte di torre formata da n dischi, poiché abbiamo ipotizzato che la proprietà valga per n dischi;
- un movimento per spostare il disco maggiore;
- $2^n - 1$ movimenti per ricostruire sopra al disco maggiore la torre da n dischi.

In totale dobbiamo compiere $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$ movimenti.

E i monaci di Brahma? Con 64 dischi, servono $2^{64} - 1$ movimenti, vale a dire oltre $1{,}8 \cdot 10^{19}$ movimenti. Se i sacerdoti impiegassero anche solo un secondo per ogni movimento, ci vorrebbero quasi 600 miliardi di anni per ricostruire l'intera torre! La teoria del Big Bang afferma che l'universo ha circa 15 miliardi di anni; la Terra ha circa 4,5 miliardi di anni; l'Homo Sapiens appena 200 000 anni… possiamo dire di essere salvi!