MATEMATICA AL COMPUTER

L'ellisse

Costruiamo una funzione di Wiris che in ingresso richieda un valore d e in uscita dia l'equazione dell'eventuale retta $y = k$ che intercetta una corda di misura d sull'arco dell'ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ che giace sul semipiano delle y maggiori o uguali a 0.

RISOLUZIONE

Analisi del problema

Notiamo che la corda è parallela all'asse x ed è simmetrica rispetto all'asse y, quindi la sua lunghezza d è data dall'ascissa positiva del punto di intersezione della retta $y = k$ con l'ellisse moltiplicata per 2.
Osserviamo, poi, che per l'esistenza della soluzione è necessario che siano rispettate due condizioni:

- la lunghezza della corda da assegnare deve essere un dato non negativo;
- il radicando, che risulta nell'espressione per il calcolo di k, non può essere negativo.

Dopo è possibile effettuare il calcolo di k e ricavare la retta $y = k$.

Formula per determinare il parametro *k*

Per ricavare la formula che esprime k in funzione di d ci serviamo degli strumenti di Wiris.

La risoluzione del problema

Con gli strumenti di Wiris ricaviamo l'espressione che dà *k* in dunzione di *d*

$$\text{risolvere}\left(x^2+\frac{y^2}{4}==1,\ y\right) \rightarrow \{\{y=-2\cdot\sqrt{-x^2+1}\},\{y=2\cdot\sqrt{-x^2+1}\}\}$$

$$\text{risolvere}\left(\begin{cases} y=k \\ y=2\cdot\sqrt{-x^2+1}\end{cases},\{x,y\}\right) \rightarrow \left[\left\{x=\frac{\sqrt{-k^2+4}}{2},y=k\right\},\left\{x=-\frac{\sqrt{-k^2+4}}{2},y=k\right\}\right]$$

$$\text{rdk} = d = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{-k^2+4}}{2}\right) \rightarrow d=\sqrt{-k^2+4}$$

$$\text{risolvere}(\text{rdk},k) \rightarrow \{\{k=-\sqrt{-d^2+4}\},\{k=\sqrt{-d^2+4}\}\}$$

- Esplicitiamo y dall'equazione dell'ellisse con il comando *risolvere* rispetto alla y. Wiris fornisce come risultato le equazioni delle due semiellissi che stanno, rispettivamente, al di sopra e al di sotto dell'asse x.
- Troviamo le intersezioni della semiellisse che sta sopra l'asse x con la retta $y = k$: attiviamo il modello *risolvere sistema*: nel campo delle prime equazione digitiamo $y = k$ e in quello della seconda immettiamo l'equazione della semiellisse superiore prendendola dal precedente risultato con *Copia e Incolla*. Facciamo clic sul pulsante *Calcola*: Wiris mostra le coordinate dei due punti in funzione di k.
- Assegniamo alla variabile *rdk* la formula per calcolare la misura di d, moltiplicando per 2 l'ascissa positiva importata con *Copia e Incolla* dal risultato precedente.
- Esplicitiamo il parametro k con l'uso del comando *risolvere* applicato a *rdk*. Wiris fornisce due espressioni per k, a noi però interessa quella di segno positivo.

Costruzione della funzione di Wiris

- Costruiamo la funzione richiesta dall'esercizio come nella figura sotto.

```
Costruiamo la funzione richiesta di Wiris
k(d) := se d <0 allora
            uscita = "Il dato non è accettabile"
        altrimenti
            se -d²+4 <0 allora
                uscita = "La corda non si forma"
            altrimenti
                uscita = y = √(-d²+4)
            fine
        fine ;
```

- Tenendo conto dell'analisi svolta, controlliamo l'esistenza della soluzione ricorrendo due volte all'istruzione condizionale di Wiris. Annidiamo le due istruzioni facendo clic sul menu *Programmazione* e poi sul modello *Se … allora … altrimenti …* della corrispondente *palette*. Nei campi del modello *Se … allora … altrimenti …*, che Wiris mette in evidenza, scriviamo le opportune condizioni e i messaggi corrispondenti come vediamo nella figura sopra.

- Nel campo di uscita della retta importiamo dal precedente risultato con *Copia e Incolla* la formula che dà il valore positivo per k.

Applicazioni della funzione di Wiris

- Applichiamo infine la funzione ad alcuni dati come nella figura sotto, inserendo il nome della funzione con il valore del dato di ingresso fra parentesi, seguito da un clic sul pulsante *Calcola*.

Applichiamo la funzione

$k(1) \rightarrow y=\sqrt{3}$

$k(2) \rightarrow y=0$

$k(-1) \rightarrow$ Il dato non è accettabile

$k(0) \rightarrow y=2$

$k\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow y=\frac{\sqrt{15}}{2}$

$k(3) \rightarrow$ La corda non si forma

$k(1.5) \rightarrow y=1.3229$

ESERCIZI IN PIÙ

Data l'ellisse *ell* di equazione $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, costruisci le funzioni di Wiris che richiedono in ingresso i dati scritti nella prima colonna e danno in uscita gli eventuali risultati indicati nella seconda.
Prova le funzioni con i dati proposti in calce.

1

Dati in ingresso	Risultati in uscita
Il coefficiente q della retta r: $y=x+q$.	Le coordinate degli eventuali punti di incontro di *ell* con r.
Prova la funzione con $q=0$, $q=5$, $q=6$.	

$\left[\left(\frac{12}{5};\frac{12}{5}\right) \text{ e } \left(-\frac{12}{5};-\frac{12}{5}\right); \left(-\frac{16}{5};\frac{9}{5}\right);\right.$ «r non incontra *ell*»$]$

2

Dati in ingresso	Risultati in uscita
L'ascissa x_Q del punto Q di *ell* appartenente al primo quadrante.	La lunghezza della corda OQ (dove O è l'origine).
Prova la funzione con $x_Q=-2$, $x_Q=0$, $x_Q=1$, $x_Q=5$.	

[«Q non appartiene al primo quadrante»; 3; $\frac{\sqrt{151}}{4}$; «Q non esiste»]

3

Dati in ingresso	Risultati in uscita
L'ordinata y_R del punto R di *ell* appartenente al terzo quadrante.	L'equazione della retta OR (dove O è l'origine).
Prova la funzione con $y_R=-3$, $y_R=-\frac{12}{5}$, $y_R=-1$, $y_R=2$, $y_R=4$.	

[$x=0$, $y=x$, $y=\frac{3\sqrt{2}}{16}x$, «R non appartiene al terzo quadrante»; «R non esiste»]

4

Dati in ingresso	Risultati in uscita
Le coordinate di un punto casuale D interno al rettangolo di vertici $O(0; 0)$, $A(4; 0)$, $B(4; 3)$ e $C(0; 3)$.	Il messaggio che dica se il punto è o dentro o fuori o sul bordo dell'ellisse.
SUGGERIMENTO Per dare le coordinate di un punto casuale siffatto digitare come argomento della funzione di Wiris: (CASUALE(0.0, 4.0), CASUALE(0.0, 3.0)). Puoi inserire la funzione in un ciclo iterativo che la applichi n (un numero abbastanza grande) volte e conti quante volte il punto cade dentro e sul bordo dell'ellisse. Poi usa il rapporto (*punti dentro + punti sul bordo*) / *punti lanciati* per determinare l'area dell'ellisse con il metodo detto di MonteCarlo.	

Usa Wiris sia per svolgere i calcoli necessari per risolvere i seguenti problemi, sia per tracciare un grande grafico dei dati e dei risultati parziali e finali, corredato da diverse didascalie.

5 Trova le coordinate del vertice A (appartenente al primo quadrante) del rettangolo $ABCD$ di area $S = 12\sqrt{3}$ e inscritto nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.
Qual è l'area massima che può avere un tale rettangolo?

$\left[A_1\left(2; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), A_2\left(2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right); S_{max} = \frac{576}{25}, \text{il quadrato}\right]$

6 Trova l'equazione dell'ellisse $hx^2 + ky^2 = 1$ passante per M e per N, punti di intersezione della retta $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ con la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, passante per i punti $A(-6; -3)$, $B(-2; -3)$ e $C(2; -1)$.

$\left[\frac{1}{108}x^2 + \frac{2}{27}y^2 = 1\right]$

7 Trova l'equazione dell'elisse *ell* riferita agli assi, sapendo che l'area del triangolo ABV, dove A e B sono le intersezioni della retta $y = 2$ con *ell* e $V(0; -4)$ è uno dei vertici di *ell*, vale 12.

$\left[\frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{16}y^2 = 1\right]$