MATEMATICA E OMBRE

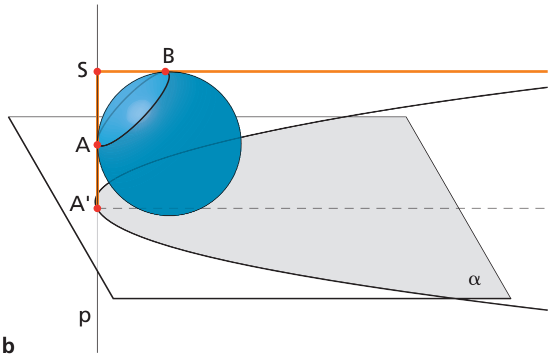
Coniche in ombra

Le coniche possono essere pensate come equazioni quadratiche in due variabili, sezioni di un doppio cono indefinito con un piano, ma anche come ombre di una sfera…

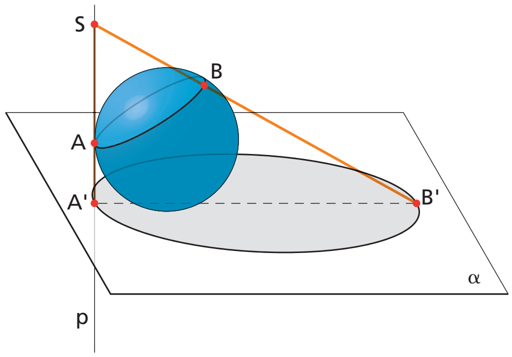
Com'è possibile ottenere parabole, ellissi e iperboli proiettando un fascio di luce su una sfera?

LA RISPOSTA

Consideriamo una sfera tangente a un piano α e a una retta p perpendicolare a tale piano. Su p è posta, a una certa distanza dal piano, una sorgente luminosa puntiforme S. I raggi uscenti da S determinano un cono che è tangente alla sfera lungo la circonferenza di diametro AB. Il cerchio di diametro AB proietta un'ombra sul piano α; il segmento $A'B'$ è la proiezione del diametro AB, e il contorno dell'ombra è una curva del piano α. Questa curva è una conica, in quanto ottenuta come sezione di un cono (il cono del fascio luminoso proiettato da S) con un piano (il piano α) . Nel caso della figura **a**, abbiamo un'ellisse.



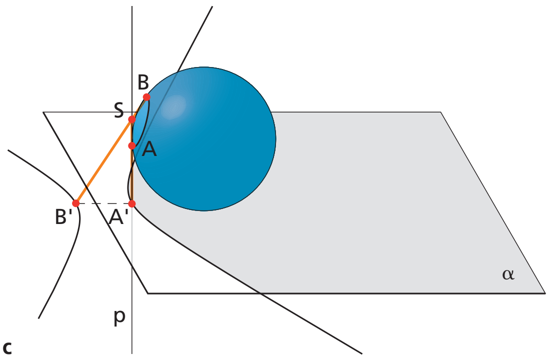
b



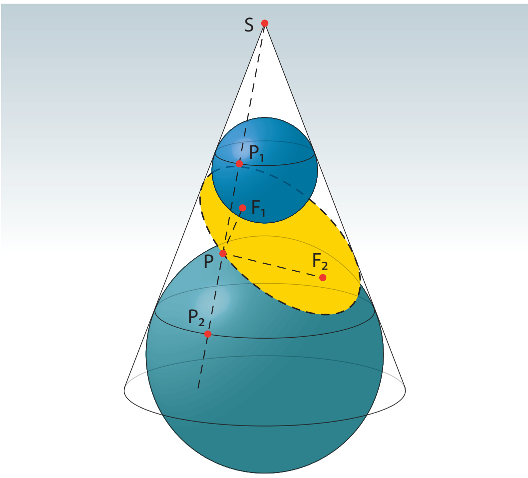
a

Se spostiamo S lungo la retta p fino a che il raggio luminoso SB diventa parallelo al piano α, possiamo immaginare che la conica «ombra» del cerchio di diametro AB si allunghi sempre più, fino ad aprirsi e a trasformarsi in una parabola (figura **b**).

Se continuiamo ad abbassare il punto S, otteniamo la situazione della figura **c**, in cui la conica «ombra» del cerchio si spezza in due rami, dando luogo a un'iperbole.



c



Le sfere di Dandelin

È possibile dimostrare che, nel caso delle ellissi e delle iperboli, esistono due sfere che sono tangenti sia al piano α, sia alla superficie del cono, mentre nel caso della parabola ne esiste una sola. Esse sono chiamate *sfere di Dandelin*, dal nome del matematico che le studiò, Germinal-Pierre Dandelin (1794-1847).

Il loro interesse è dovuto al fatto che con il loro studio si chiarisce il legame fra le coniche definite come «luoghi di punti» alle coniche definite come sezioni piane di un cono.

Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone