MATEMATICA E STORIA
Polinomi identici

Augustin-Louis Cauchy, nel suo *Cours d'analyse* (1821), scrive:
«I due polinomi $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$, entrambi di grado $n-1$, risultano uguali per ciascuno dei valori x_0, x_1, x_2, …, x_{n-1}».

M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,
Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique,
Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

a. Cosa si può dire del grado del polinomio differenza $\Phi(x)-\Psi(x)$?

b. Determina il valore di $\Phi(x_i)-\Psi(x_i)$, per $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

c. Per la risposta precedente e per il teorema di Ruffini, il polinomio $\Phi(x)-\Psi(x)$ risulterà divisibile per n binomi di primo grado: quali?

d. Qual è il grado del prodotto dei precedenti binomi?

e. Le precedenti risposte **a** e **d** sono inconciliabili: perché?

RISOLUZIONE

a. La differenza di due polinomi di grado $n-1$ è un polinomio di grado al più $n-1$. Infatti, se

$$\Phi(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0,$$

$$\Psi(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0,$$

con a_{n-1} e b_{n-1} diversi da zero, allora

$$\Phi(x)-\Psi(x) = (a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1} + (a_{n-2}-b_{n-2})x^{n-2} + \ldots + (a_1-b_1)x + (a_0-b_0)$$

è un polinomio di grado minore o uguale a $n-1$.

b. Poiché i due polinomi $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$ risultano uguali per ciascuno dei valori x_0, x_1, x_2, …, x_{n-1}, risulta:

$$\Phi(x_0)-\Psi(x_0) = \Phi(x_1)-\Psi(x_1) = \Phi(x_2)-\Psi(x_2) = \ldots = \Phi(x_{n-1})-\Psi(x_{n-1}) = 0.$$

c. x_0, x_1, x_2, …, x_{n-1} sono dunque radici del polinomio differenza $\Phi(x)-\Psi(x)$, che risulta così divisibile per ciascuno degli n binomi di primo grado $x-x_0$, $x-x_1$, $x-x_2$, …, $x-x_{n-1}$. Il polinomio differenza si può allora esprimere nella forma:

$$\Phi(x)-\Psi(x) = p(x)\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}),$$ dove $p(x)$ indica sempre un polinomio.

d. Il prodotto $(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$ ha grado n.

e. Per la risposta **a**, il polinomio differenza $\Phi(x)-\Psi(x)$ ha grado al più $n-1$, mentre per la risposta **d** esso ha grado almeno n, quindi le due risposte sono in contraddizione.

ESERCIZIO IN PIÙ

Completiamo il ragionamento
Considerando le risposte all'esercizio della scheda, completa l'enunciato del seguente teorema, tratto sempre dal *Cours d'analyse* di Cauchy, e formula una sua dimostrazione per assurdo.

«Se due polinomi nella variabile x risultano uguali per un numero di valori di questa variabile superiore al grado di ciascuno dei due polinomi, essi saranno (fra di loro) …».

Risoluzione

Completiamo l'enunciato del teorema:

«Se due polinomi nella variabile x risultano uguali per un numero di valori di questa variabile superiore al grado di ciascuno dei due polinomi, essi saranno (fra di loro) uguali per qualsiasi valore di x».

Dimostriamo il teorema, supponendo che i due polinomi $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$ siano diversi.
Sia $n-1$ il grado massimo dei due polinomi. Allora $\Phi(x)-\Psi(x)$ è un polinomio di grado al più $n-1$ che, per le ipotesi del teorema, si annulla per almeno n valori $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Il polinomio differenza risulterebbe così divisibile per il prodotto $(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$, vale a dire per un polinomio di grado n, e questo è assurdo.
I due polinomi iniziali non possono essere diversi; sono pertanto uguali.