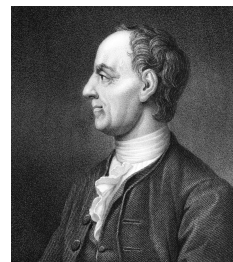


## MATEMATICA E STORIA

# Limiti e infinito



«Se  $a > 1$ , allora  $a^z$  ha un valore maggiore se il valore di  $z$  è maggiore di quanto fosse originariamente, e come  $z$  va a infinito, così  $a^z$  va a infinito. Se  $z = 0$ , allora  $a^z = 1$ ; se  $z < 0$ , allora i valori di  $a^z$  diventano minori di 1 e come  $z$  va a  $-\infty$ ,  $a^z$  va a 0.»

Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 1748

- Illustra con un esempio numerico l'affermazione iniziale: «Se  $a > 1$ , allora  $a^z$  ha un valore maggiore se il valore di  $z$  è maggiore di quanto fosse originariamente».
- Esprimi in termini di limiti l'affermazione: «come  $z$  va a infinito, così  $a^z$  va a infinito».
- Giustifica con un esempio l'affermazione: «se  $z < 0$ , allora i valori di  $a^z$  diventano minori di 1».
- Esprimi in termini di limiti l'affermazione conclusiva: «come  $z$  va a  $-\infty$ ,  $a^z$  va a 0».

### RISOLUZIONE

- Se per esempio  $a = 2$ , allora  $2^2 > 2^1$ .
- $\lim_{z \rightarrow +\infty} a^z = +\infty$ .
- Se per esempio  $a = 3$  e  $z = -2$ , allora  $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} < 1$ .
- $\lim_{z \rightarrow -\infty} a^z = 0$ .

### ESERCIZIO IN PIÙ

«D'altro canto, se  $a < 1$  ma positivo, allora i valori di  $a^z$  diminuiscono quando  $z$  aumenta al di sopra di 0. L'esponenziale aumenta come  $z$  aumenta in direzione negativa. Quando  $a < 1$ , abbiamo  $\frac{1}{a} > 1$ »

L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*

- Illustra con un esempio l'affermazione: «i valori di  $a^z$  diminuiscono quando  $z$  aumenta al di sopra di 0».
- Illustra con un esempio l'affermazione: «L'esponenziale aumenta come  $z$  aumenta in direzione negativa».
- Illustra con un esempio l'affermazione: «Quando  $a < 1$ , abbiamo  $\frac{1}{a} > 1$ ».
- Esprimi in termini di limiti a  $+\infty$  e a  $-\infty$  la situazione introdotta nel breve testo di questo Esercizio in più.

### Risoluzione

- Se per esempio  $a = \frac{1}{2}$ , allora  $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ .
- Se per esempio  $a = \frac{1}{2}$ , allora  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$ .
- Se per esempio  $a = \frac{1}{2}$ , allora  $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ .
- $\lim_{z \rightarrow +\infty} a^z = 0$ ;  $\lim_{z \rightarrow -\infty} a^z = +\infty$ .