MATEMATICA E STORIA
Limiti e infinito

«Se $a > 1$, allora a^z ha un valore maggiore se il valore di z è maggiore di quanto fosse originariamente, e come z va a infinito, così a^z va a infinito. Se $z = 0$, allora $a^z = 1$; se $z < 0$, allora i valori di a^z diventano minori di 1 e come z va a $-\infty$, a^z va a 0.»

Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 1748

a. Illustra con un esempio numerico l'affermazione iniziale: «Se $a > 1$, allora a^z ha un valore maggiore se il valore di z è maggiore di quanto fosse originariamente».

b. Esprimi in termini di limiti l'affermazione: «come z va a infinito, così a^z va a infinito».

c. Giustifica con un esempio l'affermazione: «se $z < 0$, allora i valori di a^z diventano minori di 1».

d. Esprimi in termini di limiti l'affermazione conclusiva: «come z va a $-\infty$, a^z va a 0».

RISOLUZIONE

a. Se per esempio $a = 2$, allora $2^2 > 2^1$.

b. $\lim_{z \to +\infty} a^z = +\infty$.

c. Se per esempio $a = 3$ e $z = -2$, allora $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} < 1$.

d. $\lim_{z \to -\infty} a^z = 0$.

ESERCIZIO IN PIÙ

«D'altro canto, se $a < 1$ ma positivo, allora i valori di a^z diminuiscono quando z aumenta al di sopra di 0. L'esponenziale aumenta come z aumenta in direzione negativa. Quando $a < 1$, abbiamo $\frac{1}{a} > 1$.»

L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*

a. Illustra con un esempio l'affermazione: «i valori di a^z diminuiscono quando z aumenta al di sopra di 0».

b. Illustra con un esempio l'affermazione: «L'esponenziale aumenta come z aumenta in direzione negativa».

c. Illustra con un esempio l'affermazione: «Quando $a < 1$, abbiamo $\frac{1}{a} > 1$».

d. Esprimi in termini di limiti a $+\infty$ e a $-\infty$ la situazione introdotta nel breve testo di questo Esercizio in più.

Risoluzione

a. Se per esempio $a = \frac{1}{2}$, allora $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

b. Se per esempio $a = \frac{1}{2}$, allora $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$.

c. Se per esempio $a = \frac{1}{2}$, allora $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

d. $\lim_{z \to +\infty} = a^z = 0$; $\lim_{z \to -\infty} a^z = +\infty$.