MATEMATICA E STORIA

Progressioni che si vanno dilatando di un tanto e 1/3

Nel suo *General Trattato*, Tartaglia affronta anche le progressioni geometriche; chiede per esempio di trovare la somma dei termini 81, 108, 144, 192, 256.
Secondo la regola proposta da Tartaglia, per trovare tale somma bisogna sottrarre il primo termine dall'ultimo e dividere questo risultato per la ragione diminuita di 1; quello che si ottiene va sommato all'ultimo termine.

a. Individua la ragione della progressione proposta da Tartaglia, esprimendola come somma di un numero intero e di una frazione.

b. Esegui i calcoli indicati nella regola di Tartaglia.

c. Mostra che la regola è equivalente a $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

RISOLUZIONE

a. Osserviamo che il rapporto fra due termini consecutivi della progressione è costante e uguale a quattro terzi:

$$\frac{108}{81} = \frac{144}{108} = \frac{192}{144} = \frac{256}{192} = \frac{4}{3}.$$

Prendendo spunto da quanto suggerito nel titolo, la ragione è dunque $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$.

b. Per la progressione proposta da Tartaglia $n = 5$, $a_1 = 81$, $a_5 = 256$, $q = 1 + \frac{1}{3}$.
Applicando la regola, otteniamo:

$$S_5 = \frac{a_n - a_1}{q - 1} + a_n = \frac{256 - 81}{1 + \frac{1}{3} - 1} + 256 = 175 \cdot 3 + 256 = 781.$$

c. Poiché in una progressione geometrica $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, otteniamo:

$$\frac{a_n - a_1}{q - 1} + a_n = \frac{a_1 \cdot q^{n-1} - a_1}{q - 1} + a_1 \cdot q^{n-1} = a_1\left(\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} + q^{n-1}\right) = a_1 \cdot \frac{q^{n-1} - 1 + q^n - q^{n-1}}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

ESERCIZIO IN PIÙ

Il matematico tedesco Michael Stifel (1487-1567) ha proposto la seguente regola per calcolare la somma di n termini consecutivi di una progressione geometrica:

- moltiplica l'ultimo termine per la ragione;
- sottrai il primo termine dal successivo;
- sottrai lo stesso primo termine dal prodotto calcolato inizialmente;
- moltiplica il primo termine per quest'ultimo risultato;
- dividi quanto ottenuto per la prima delle differenze calcolate.

a. Utilizza la regola di Stifel per trovare la somma dei termini 81, 108, 144, 192, 256.

b. Mostra l'equivalenza fra la regola di Stifel e $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Risoluzione

a. Siamo sempre nel caso di una progressione geometrica con $n = 5$, $a_1 = 81$, $a_5 = 256$, $q = \frac{4}{3}$.
Applichiamo la regola di Stifel:

$$256 \cdot \frac{4}{3} = \frac{1024}{3} \rightarrow 108 - 81 = 27 \rightarrow \frac{1024}{3} - 81 = \frac{781}{3} \rightarrow 81 \cdot \frac{781}{3} = 21\,087 \rightarrow \frac{21\,087}{27} = 781.$$

b. Impostiamo la formula della regola di Stifel: $S_n = \dfrac{(a_n \cdot q - a_1) \cdot a_1}{a_2 - a_1}$.

Mostriamo l'equivalenza con la formula data nel libro, ricordando che vale sempre $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$:

$$\frac{(a_n \cdot q - a_1) \cdot a_1}{a_2 - a_1} = \frac{(a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1) \cdot a_1}{a_1 \cdot q - a_1} = \frac{(a_1 \cdot q^n - a_1) \cdot a_1}{a_1 \cdot (q-1)} = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}.$$