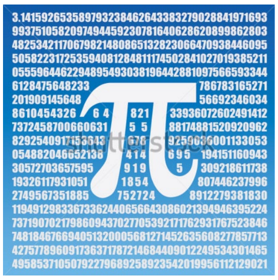
MATEMATICA E STORIA

π in serie

Si possono utilizzare le serie per esprimere il valore di π?



LA RISPOSTA

Ci sono parecchie formule che mettono in relazione il numero π con delle serie numeriche e che possono servire per calcolare le sue cifre.
La prima, attribuita al matematico scozzese James Gregory, ma pubblicata dal matematico e filosofo tedesco Gottfried W. Leibniz nel 1674, è:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Questa formula è molto semplice, ma la convergenza della serie a $\frac{\pi}{4}$ è molto lenta e bisogna sommare più di 600 termini prima di ottenere stabilmente la seconda cifra decimale di π, cioè 4.
Un'altra formula semplice è quella di Eulero, grande matematico svizzero del Settecento:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

ma anch'essa ha una convergenza molto lenta.

Esistono formule con una convergenza molto più rapida, ma molto più complesse.
Per esempio, la formula dell'indiano Srinivasa A. Ramanujan, uno dei più grandi matematici del Novecento, dà:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!\,(1103 + 26390n)}{(n!)^4\, 396^{4n}}.$$

Già per $n = 2$ si ricavano più di venti cifre decimali di π corrette e per ogni termine aggiunto nella serie si ottengono otto cifre corrette in più.
Nel 1996 i matematici David H. Bailey, Peter Borwein e Simon Plouffe pubblicarono, sulla rivista scientifica *Mathematics of Computation*, la «miracolosa» formula

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right),$$

dalla quale si ricava l'algoritmo per calcolare una qualsiasi cifra decimale di π, senza dover calcolare le precedenti.