MATEMATICA E STORIA

Un marchese con l'hobby della matematica

Riportiamo la sintesi di un problema presentato dal marchese Guillaume François-Antoine De L'Hospital (1661-1704) nel suo *Analyse des infiniments petits*, sezione IX:

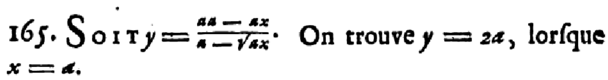
«Stabilire quale sia il valore dell'ordinata y, in corrispondenza del valore a, quando essa sia espressa da una frazione in cui numeratore e denominatore diventano ciascuno zero se $x = a$».

a. Confronta la precedente sintesi del problema di De l'Hospital con l'enunciato dell'omonimo teorema che trovi in questo libro: quali analogie rilevi?

b. Esamina ora il seguente esempio, proposto nel paragrafo 165 di *Analyse*, e verifica l'affermazione in esso contenuta, attraverso l'applicazione del teorema:

«Sia $y = \dfrac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$.

Si trova $y = 2a$ quando $x = a$».


165. Soit $y = \frac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$. On trouve $y = 2a$, lorſque $x = a$.

RISOLUZIONE

a. Nell'enunciato odierno del teorema di De L'Hospital, riportato sul libro, si considerano due funzioni, $f(x)$ e $g(x)$, che tendono a 0 quando x tende a un determinato valore reale x_0. Questo è il caso esaminato nella sintesi del problema tratto dall'opera originale.
Il teorema afferma l'esistenza del limite del rapporto delle due funzioni; nella sintesi, De L'Hospital indica l'ordinata come valore del rapporto.
Notiamo come nella sintesi non compaia, se non «sotto mentite spoglie», un ragionamento al limite, che tuttavia, nell'opera originale, viene suggerito (anche se non in termini moderni) subito dopo: «Si prenda un'ordinata infinitamente vicina...».

b. Consideriamo le funzioni $f(x) = aa - ax$ e $g(x) = a - \sqrt{ax}$, con $a > 0$ (se fosse $a < 0$, non si avrebbe una forma indeterminata per $x \to a$).
Entrambe le funzioni sono definite in un intorno di $x = a$, tendono a 0 per $x \to a$ e sono derivabili in tale intorno con $f'(x) = -a$ e $g'(x) = -\dfrac{a}{2\sqrt{ax}}$, con $g'(x) \neq 0$.
Valgono allora le ipotesi del teorema di De L'Hospital e possiamo calcolare il limite:

$$\lim_{x \to a} \frac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{-a}{-\dfrac{a}{2\sqrt{ax}}} = \lim_{x \to a} 2\sqrt{ax} = 2a.$$

ESERCIZIO IN PIÙ

Una funzione paciosa, una derivata insidiosa

È paradossale che il nome del matematico francese Michel Rolle (1652-1719) appaia nel capitolo che riguarda il calcolo differenziale. Infatti egli si oppose a quello che allora era un nuovo modo di fare matematica. Tuttavia il suo contributo al progresso della scienza ha motivo di essere ricordato. Ecco, in versione moderna, un esempio da lui proposto.
Considera la funzione:

$$y - b = \sqrt[3]{\frac{(x^2 - 2ax + a^2 - b^2)^2}{a}}, \quad \text{con } a \neq 0.$$

a. Calcola la derivata y' e determina le sue condizioni di esistenza.

b. Posto $a = 2$ e $b = 3$, stabilisci se la funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1; 5]$.

Risoluzione

a. Esprimiamo y nella forma

$$y = \frac{(x^2 - 2ax + a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a}} + b,$$

da cui:

$$y' = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2x - 2a}{\sqrt[3]{x^2 - 2ax + a^2 - b^2}} = \frac{4(x-a)}{3\sqrt[3]{a[(x-a)^2 - b^2]}} = \frac{4(x-a)}{3\sqrt[3]{a(x-a-b)(x-a+b)}}.$$

La funzione è derivabile per $x \neq a \pm b$.

b. Posto $a = 2$ e $b = 3$, la funzione e la sua derivata prima diventano:

$$y = \frac{(x^2 - 4x - 5)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} + 3, \qquad y' = \frac{4(x-2)}{3\sqrt[3]{2(x-5)(x+1)}}.$$

La funzione y è continua in $[-1; 5]$, derivabile in $]-1; 5[$, e agli estremi assume i valori:

$$y(-1) = \frac{(1 + 4 - 5)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} + 3 = 3, \qquad y(5) = \frac{(25 - 20 - 5)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} + 3 = 3.$$

Sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle; esiste quindi un punto c in $]-1; 5[$ tale che:

$$y'(c) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{4(c-2)}{3\sqrt[3]{2(c-5)(c+1)}} = 0 \quad \rightarrow \quad c - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad c = 2.$$

La retta tangente al grafico di $y(x)$ nel punto di ascissa 2 è orizzontale.