MATEMATICA E STORIA

Il rettangolo massimo

Leggi il documento seguente, tratto dal *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* di Pierre de Fermat (1601-1665).

> Dividere il segmento AC in E in modo tale che il rettangolo di dimensioni AE ed EC sia massimo.
>
> 
>
>
> Indichiamo con b il segmento AC.
> Se indichiamo con a una delle due parti di b, la restante sarà $b - a$ e il rettangolo che dovrà essere massimo sarà $ba - a^2$. Diventi poi $a + e$ la parte a di b; dunque la parte restante sarà $b - a - e$, per cui il rettangolo sarà $ab - a^2 + be - 2ae - e^2$, che deve essere *adeguagliato* al precedente rettangolo $ba - a^2$. Sottratti i termini comuni, *be adeguaglierà* $2ae + e^2$ e divisi tutti per e, *b adeguaglierà* $2a + e$. Si elida la e; b uguaglia $2a$ e dunque b si deve dividere in due parti uguali per risolvere il problema proposto, né si può dare un metodo più generale.

Interpretiamo il documento attraverso i seguenti punti.

a. Mostra che l'area del rettangolo avente lati (di lunghezza) a e $b - a$ è $ba - a^2$.

b. Mostra che l'area del rettangolo avente lati $a + e$ e $b - a - e$ è $ab - a^2 + be - 2ae - e^2$.

c. Indichiamo con $\approx$ l'«adequazione»; avremo: $ba - a^2 \approx ab - a^2 + be - 2ae - e^2$. Operando analogamente alla risoluzione delle equazioni, esegui le operazioni indicate da Fermat e completa i passaggi per ricavare b avendo anche eliso, cioè eliminato, e.

d. Risolvi attraverso una funzione obiettivo il problema «Dividere un segmento in due parti il cui prodotto sia massimo».

RISOLUZIONE

a. È sufficiente calcolare il prodotto:

$$a(b - a) = ab - a^2 = ba - a^2.$$

b. Anche in questo caso, svolgiamo i calcoli:

$$(a + e)(b - a - e) = ab - a^2 - ae + be - ae - e^2 = ab - a^2 + be - 2ae - e^2.$$

c. Trattiamo l'«adequazione» con le stesse regole delle equazioni. Otteniamo:

$$ba - a^2 \approx ab - a^2 + be - 2ae - e^2$$

sottraiamo i termini comuni

$$0 \approx be - 2ae - e^2$$

$$be \approx 2ae + e^2$$

dividiamo entrambi i membri per e

$$b \approx 2a + e$$

elidiamo (eliminiamo) e

$$b \approx 2a.$$

d. Cerchiamo una funzione obiettivo che risolva il problema.
Detta x una delle parti in cui viene diviso il segmento AC, la rimanente sarà lunga $b - x$ e la funzione obiettivo, che restituisce l'area del rettangolo di dimensioni x e $b - x$, sarà:

$$f(x) = x(b - x) = bx - x^2.$$

Dobbiamo trovare il massimo di questa funzione obiettivo; determiniamolo tramite lo studio dei punti stazionari:

$$f'(x) = b - 2x; \quad f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad b - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{b}{2}.$$

Poiché

$$f'(x) > 0, \text{ quindi } f(x) \text{ crescente, per } 0 < x < \frac{b}{2},$$

$$f'(x) < 0, \text{ quindi } f(x) \text{ decrescente, per } \frac{b}{2} < x < b,$$

il punto $x = \frac{b}{2}$ risulta di massimo per la funzione obiettivo.

Il risultato conferma quanto trovato sopra col metodo di Fermat.

ESERCIZIO IN PIÙ

«Adequazione» e parabola
Il metodo dell'«adequazione» di Fermat fa riferimento alla tangente di equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$ a una data curva, nel punto di ascissa x_0.
Consideriamo per esempio la parabola $y = ax^2$.

a. Sostituisci nell'equazione della retta tangente le ordinate ricavate dall'equazione della parabola corrispondenti rispettivamente all'ascissa generica x e a x_0, «adeguaglia», svolgi i calcoli e semplifica in modo da verificare che $m \approx a(x + x_0)$. Che significato ha il valore di m così trovato?

b. Riportati ora all'equazione, immaginando che il punto preso sulla tangente vada a coincidere con il punto di contatto con la curva e ricava il valore esatto di m.

Risoluzione

a. Sostituiamo a y e a y_0, nell'equazione della retta tangente, le ordinate ax^2 e ax_0^2 e «adeguagliamo»; troviamo:

$$ax^2 - ax_0^2 \approx m(x - x_0) \quad \rightarrow \quad a(x^2 - x_0^2) \approx m(x - x_0) \quad \rightarrow \quad a(x - x_0)(x + x_0) \approx m(x - x_0).$$

Dividendo entrambi i membri per $(x - x_0)$, otteniamo:

$$m \approx a(x + x_0).$$

Osserviamo che questo è il coefficiente angolare della retta secante la parabola, passante per i suoi punti di coordinate $(x_0; ax_0^2)$ e $(x; ax^2)$.

b. Considerando che x diventa uguale a x_0, l'«adequazione» diventa un'equazione e perciò:

$$m \approx a(x_0 + x_0) \quad \rightarrow \quad m \approx 2ax_0.$$

Abbiamo riottenuto il risultato noto: la retta tangente alla parabola di equazione $y = ax^2$ nel suo punto di ascissa x_0 ha coefficiente angolare pari a $y'(x_0) = 2ax_0$.