MATEMATICA AL COMPUTER

Funzioni con il foglio elettronico

Data la seguente famiglia di funzioni nella variabile reale x, con il parametro k,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{kx - 4},$$

costruiamo un foglio che, ricevuto un valore del parametro, permetta di ottenere:

a. il dominio della funzione,

b. le coordinate degli eventuali punti di intersezione con gli assi cartesiani,

c. le equazioni degli eventuali asintoti,

d. le coordinate degli eventuali punti di massimo e di minimo relativi,

e. i grafici della funzione e degli asintoti dopo aver inserito gli estremi di variazione della x.

RISOLUZIONE

Analisi del problema

a. Se $k \neq 0$, il dominio della funzione è $x \neq \frac{4}{k}$; se $k = 0$, è dato da $\mathbb{R}$ (il grafico della funzione diventa una parabola).

b. Notiamo che tutte le funzioni intersecano l'asse y in $(0; 1)$. Intersezioni con l'asse x: $x^2 - 4 = 0$ con $kx - 4 \neq 0$, da cui $x = \pm 2$, per $\pm 2k - 4 \neq 0$, cioè $k \neq -2$ e $k \neq 2$. Quindi, se $k \neq -2$ e $k \neq 2$, le intersezioni con l'asse x sono $(-2; 0)$ e $(2; 0)$. Se $k = -2$ o $k = 2$, il grafico della funzione diventa quello di una retta con un punto di discontinuità di terza specie in $\left(\frac{4}{k}; 0\right)$.

Proseguiamo lo studio delle funzioni escludendo i valori -2, 0, 2 del parametro k che portano ai casi particolari visti.

c. Calcoliamo, $\lim\limits_{x \to \frac{4}{k}} \frac{x^2 - 4}{kx - 4} = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4}{x(kx - 4)} = \frac{1}{k}$ e $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{kx - 4} - \frac{1}{k}x\right) = \frac{4}{k^2}$, ottenendo le equazioni dell'asintoto verticale $x = \frac{4}{k}$ e dell'asintoto obliquo $y = \frac{1}{k}x + \frac{4}{k^2}$.

d. Determiniamo la derivata prima $f'(x) = \frac{kx^2 - 8x + 4k}{(kx - 4)^2}$ e, per discuterla, calcoliamo il discriminante del numeratore $\frac{\Delta}{4} = \Delta quarti = 16 - 4k^2$. Se $\Delta quarti > 0$, cioè $-2 < k < 2$, il grafico ammette due punti estremanti, le cui ascisse sono $x_1 = \frac{4 - \sqrt{\Delta quarti}}{k}$ e $x_2 = \frac{4 + \sqrt{\Delta quarti}}{k}$.

- Se $\Delta quarti > 0$ e $k > 0$, cioè se $0 < k < 2$, la funzione è crescente per valori esterni all'intervallo $[x_1; x_2]$ ed è decrescente per valori interni, quindi la funzione ha un massimo in x_1 e un minimo in x_2.
- Se $\Delta quarti > 0$ e $k < 0$, cioè se $-2 < k < 0$, la funzione è crescente per valori interni all'intervallo $[x_2; x_1]$ (se $k < 0$, $x_2 < x_1$) ed è decrescente per valori esterni, quindi ha ancora un minimo in x_2 e un massimo in x_1.
- Se $\Delta quarti < 0$ e $k > 0$, cioè se $k > 2$, la funzione è sempre crescente.
- Se $\Delta quarti < 0$ e $k < 0$, cioè se $k < -2$, la funzione è sempre decrescente.

Il caso $\Delta quarti = 0$ porta a $k = -2$ o $k = 2$, situazioni che abbiamo già considerato.

Struttura del foglio

- Scriviamo le didascalie per ricordare il testo del problema, per indicare dove inserire il valore del parametro k (nella cella bordata D3) e per leggere i risultati.
- Imponiamo al sistema di rappresentare numeri con quattro cifre decimali, evidenziando la zona del foglio A1:D22 e usando il comando *Formato Celle Numero*.
- Assegniamo alla cella D3 il nome k e alla cella D18 il nome *deltaq* digitandoli nel campo *Casella del nome*.
- Basandoci sull'analisi svolta immettiamo le formule con le istruzioni condizionali, che selezionano i vari casi possibili.
- Per fornire il risultato del dominio, digitiamo `=SE(k=0;"R";"x diverso da")` in B5 e `=SE(k=0;"";4/k)` in C5.

- Selezioniamo il tipo di funzione scrivendo = SE(O(k = – 2; k = 2); “retta”; SE(k = 0; “parabola”; “funzione razionale fratta”)) in C7.
- Precisiamo le intersezioni con l’asse x digitando = SE(C7 = “retta”; “ha ascissa”; “hanno ascisse”) in C11 e formule con lo stesso controllo in A12, B12 e C12.
- Per lasciare vuote le celle adibite a mostrare i risultati degli asintoti e della crescenza della funzione, nei casi particolari, digitiamo all’inizio di ogni formula la condizione = SE(O(k = 0; k = – 2; k = 2); “”; …). Per esempio, scriviamo = SE(O(k = 0; k = – 2; k = 2); “”; “Gli asintoti hanno equazione:”) in A14. Istruzioni analoghe vanno in A15, B15, D15, A16, B16, C16, D16.
- Per distinguere i vari casi di crescenza e di decrescenza di $f(x)$, calcoliamo il discriminante $\frac{\Delta}{4}$ del numeratore della derivata prima. Nella cella D18 (quella che abbiamo chiamato *deltaq*) digitiamo = SE(O(k = 0; k = – 2; k = 2); “”; 16 – 4*k^2) e facciamo poi dipendere le uscite delle celle seguenti dal valore di *deltaq*.

Digitiamo	in
= SE(O(k = 0; k = – 2; k = 2); “”; “La funzione”)	A19
= SE(O(k = 0; k = – 2; k = 2); “”; SE(deltaq > 0; “ha un massimo in”; SE(k > 0; “è sempre crescente”; “è sempre decrescente”)))	B19
= SE(O(k = 0; k = – 2; k = 2); “”; SE(deltaq > 0; (4 – RADQ(deltaq))/k; “”))	B20
= SE(O(k = 0; k = – 2; k = 2); “”; SE(deltaq > 0; (B20^2 – 4)/(k*B20 – 4); “”))	D20
= SE(O(k = 0; k = – 2; k = 2; deltaq < 0); “”; “La funzione”)	A21
= SE(O(k = 0; k = – 2; k = 2); “”; SE(deltaq > 0; “ha un minimo in”; “”))	B21
= SE(O(k = 0; k = – 2; k = 2); “”; SE(deltaq > 0; (4 + RADQ(deltaq))/k; “”))	B22
= SE(O(k = 0; k = – 2; k = 2); “”; SE(deltaq > 0; (B22^2 – 4)/(k*B22 – 4); “”))	D22

Uso del foglio

- Proviamo il foglio con un valore di k, scrivendo = – 8/5 in D3. Otteniamo il foglio della figura 1.

k = = -8/5

	A	B	C	D	E
1	Lo studio delle funzioni f(x) = (x^2-4)/(k*x-4)				
2					
3	Inserisci il valore del parametro k:			-1,6000	
4					
5	Il dominio è	x diverso da	-2,5000		
6					
7	L'equazione è quella di una		funzione razionale fratta		
8	con il punto di discontinuità		x =	-2,5000	
9					
10	L'intersezione con l'asse y ha ordinata			1,0000	
11	Le intersezioni	con l'asse x	hanno ascisse		
12	-2,0000	e	2,0000		
13					
14	Gli asintoti hanno equazione:				
15	x =	-2,5000		e	
16	y =	-0,6250	* x +	1,5625	
17					
18	Il discriminante della derivata prima vale			5,7600	
19	La funzione	ha un massimo in			
20	(	-1,0000	;	1,2500	)
21	La funzione	ha un minimo in			
22	(	-4,0000	;	5,0000	)

Figura 1

Tabelle per ricavare il grafico

- Costruiamo le tabelle con i valori della x e i corrispondenti valori della $f(x)$ in *Foglio2*: una con i valori a sinistra del punto di discontinuità, una con i valori a destra. Inoltre determiniamo per ognuno dei due asintoti le coordinate di due dei loro punti agli estremi dell'area visibile del grafico.
- Richiediamo, come dato d'ingresso, l'incremento della x nella cella D5 di *Foglio2*.
- Importiamo da *Foglio1* il punto di discontinuità delle funzioni digitando = Foglio1!$C$5 nella cella D3.
- Per il ramo a sinistra del punto di disconti-nuità scriviamo = D3 – D5 in A9, = A9 – $D$5 in A10 e la copiamo sino alla cella A21, = (A9^2 – 4)/(Foglio1!$D$3*A9 – 4) in B9 la copiamo sino alla cella B21. Operiamo in modo simile con la tabella per il ramo a destra dell'asintoto.
- Digitiamo = A21 in A25, = Foglio1!$B$16*A25 + Foglio1!$D$16 in B25, = C21 in A26 e = Foglio1!$B$16*A26 + Foglio1!$D$16 in B26, per determinare due punti appartenenti all'asintoto obliquo.
- Scriviamo = D3 in C25, = MIN(B9:B21; D9:D21; B25:B26) in D25, = D3 in C26, = MAX(B9:B21; D9:D21; B25:B26) in D26, per determinare due punti dell'asintoto verticale.
- Immettiamo 0,4 in D5 e le tabelle si aggiornano come in figura 2.

	A	B	C	D
1	Le tabelle per i grafici			
2				
3	Il punto di discontinuità è in x =			-2,50
4				
5	Inserisci l'incremento della x			0,40
6				
7	I due rami della funzione			
8	x	f(x)	x	f(x)
9	-2,90	6,89	-2,10	-0,64
10	-3,30	5,38	-1,70	0,87
11	-3,70	5,05	-1,30	1,20
12	-4,10	5,00	-0,90	1,25
13	-4,50	5,08	-0,50	1,17
14	-4,90	5,21	-0,10	1,04
15	-5,30	5,38	0,30	0,87
16	-5,70	5,56	0,70	0,69
17	-6,10	5,77	1,10	0,48
18	-6,50	5,98	1,50	0,27
19	-6,90	6,19	1,90	0,06
20	-7,30	6,42	2,30	-0,17
21	-7,70	6,65	2,70	-0,40
22				
23	L'asintoto obliquo		L'asintoto verticale	
24	x	y	x	y
25	-7,70	6,38	-2,50	-0,64
26	2,70	-0,13	-2,50	6,89

Figura 2

Grafico

- Evidenziamo la zona del foglio A8:B21 (quella del ramo del grafico della funzione a sinistra dell'asintoto verticale) e facciamo clic sul bottone *Autocomposizione grafico*.
- Scegliamo il tipo di grafico:
- *Dispers.(XY), Dispersione con coordinate unite da linee smussate e senza indicatori di dati.*
- Nella seconda finestra di dialogo sfruttiamo la possibilità di unire più grafici nello stesso riferimento cartesiano per rappresentare il ramo a destra dell'asintoto e i due asintoti. Facciamo clic sul bottone *Aggiungi* e importiamo nel campo *Valori della x* quelli contenuti nella zona C9:C21 e nel campo *Valori della y* quelli contenuti nella zona D9:D21.

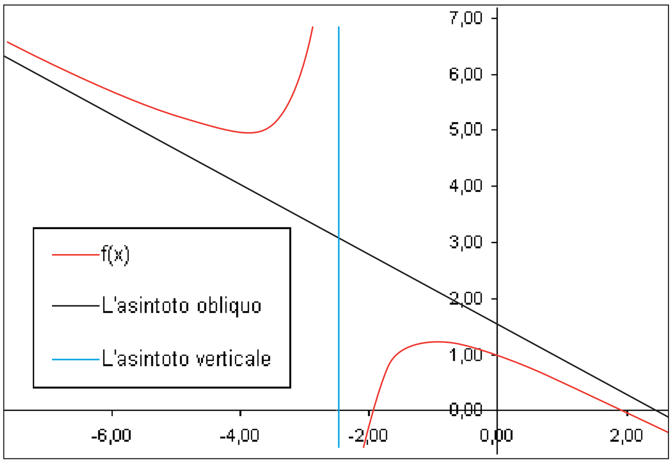

Figura 3

- Operiamo similmente per aggiungere il grafico dell'asintoto obliquo, tenendo presente le zone nelle quali abbiamo determinato le coordinate di due dei suoi punti, la A25:A26 e la B25:B26. Scriviamo L'asintoto obliquo nel campo *Nome* per farlo riportare dal programma nella *Legenda*. Aggiungiamo pure l'asintoto verticale, ricordando le zone con le coordinate di due dei suoi punti, la C25:C26 e la D25:D26.
- Togliamo la griglia dei valori e vediamo in *Grafico1* il grafico di figura 3.
- Possiamo rappresentare un'altra funzione facendo clic su *Foglio1* e digitando un altro valore per il parametro k, esclusi quelli dei casi limite.

ESERCIZI IN PIÙ

Usa lo strumento informatico che hai a disposizione per svolgere una discussione completa sullo studio delle seguenti famiglie di funzioni, in relazione ai valori del parametro $k \in \mathbb{R}$. Sul quaderno, poi, studia (in modo indipendente) la funzione che ottieni sostituendo i valori indicati del parametro e confronta i tuoi risultati con quelli del computer.

1 $f(x) = \dfrac{k-1}{x^2} - kx, \quad k = 1, k = 7.$

2 $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + k}{x}, \quad k = 1, k = 3.$

3 $f(x) = \sqrt{x^2 - k} - 2x, \quad k = -1, k = 1.$

4 $f(x) = \dfrac{x+3}{\ln(x+3)} + k, \quad k = -e, k = -4.$

5 $f(x) = x^4 - 2kx^2 + 2k + 3, \quad k = 3, k = 5.$

6 $f(x) = e^{\frac{kx-1}{x-k}}, \quad k = 1, k = 2.$

Per ognuna delle seguenti famiglie di funzioni, nella variabile reale x e parametro $h \in \mathbb{Z}$, opera in modo simile a quello proposto nelle esercitazioni precedenti.

7 $f(x) = (x-1)^h e^{-x}, \quad h = -1, 0, 2.$

8 $f(x) = \sin x + h \cos x, \quad h = 0, 1, 2.$

9 $f(x) = \dfrac{(x-1)^h}{x+2}, \quad h = -1, 1, 2.$

10 $f(x) = (2x+1)^h \ln(2x+1), \quad h = -1, 0, 1.$

Con l'aiuto del computer, realizza una sessione di lavoro in cui, dopo aver ricevuto il valore del parametro k, si trovino le coordinate degli eventuali punti di massimo e di minimo relativi, per ognuna delle seguenti funzioni.

11 $f(x) = (k-1)x^4 + kx^3$

12 $f(x) = \dfrac{x^2 - k}{x^2 + 1}$

13 $f(x) = (x^2 - kx - 2k - 3)e^{-x}$

Come nelle esercitazioni precedenti, determina l'equazione egli asintoti delle seguenti funzioni.

14 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{kx^2 + x}$

15 $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{(k-1)x^2 + 2x - k}$

16 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{kx + 1}$

Per ognuna delle seguenti funzioni, costruisci una sessione di lavoro al computer che, dopo aver ricevuto il valore della grandezza indicata, trovi, se esistono, quelli delle grandezze richieste e dia la possibilità di ottenere un grafico per verifica.

17 Data $f(x) = (x-a)\ln(a-x)$ e assegnata l'ascissa x_M del punto di massimo M del grafico di f, determina il valore di a, l'ordinata di M e l'intersezione A con l'asse x. Prova con $x_M = 2 - e^{-1}$. $[a = 2,\ y_M = 0{,}3679,\ A(1;\ 0)]$

18 Data $g(x) = 1 + ax^2 - \dfrac{1}{x}$ e assegnata l'ascissa x_T del punto T, dove la tangente al grafico di g è parallela alla retta $y = -4x$, determina il valore di a, l'ordinata di T e l'equazione della tangente. Prova con $x_T = -1$. $[a = 2{,}50,\ y_T = 4{,}50,\ y = -4{,}00x + 0{,}50]$

19 Data $f(x) = \dfrac{x^2 - a}{x^2 + 1}$ e assegnato il coefficiente m della retta $y = mx$, parallela alla tangente del grafico di f nel punto T, di ascissa 2, determina il valore di a, l'ordinata di T e l'equazione della tangente. Prova con $m = \dfrac{8}{5}$. $[a = 9,\ y_T = -1,\ y = 1{,}60x - 4{,}20]$