

MATEMATICA E FISICA

Fermat e la rifrazione della luce

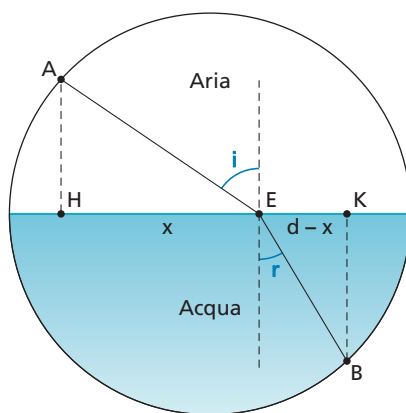
La luce percorre, fra tutti i possibili cammini da un punto a un altro, quello che richiede il minor tempo. Questo principio, formulato da Pierre de Fermat nel 1662, riconduce la determinazione della legge della rifrazione alla ricerca di una funzione che rappresenti il tempo di percorrenza e alla sua successiva minimizzazione.

Come si può determinare la funzione che esprime il tempo di percorrenza della luce da un punto A a un punto B situati in due mezzi diversi?



LA RISPOSTA

Possiamo schematizzare il cammino di un raggio di luce che subisce la rifrazione con una spezzata AEB come quella illustrata nella seguente figura.



Fermat si propone di ricavare la legge della rifrazione determinando il punto E che rende minimo il tempo di percorrenza della spezzata. Il tratto AE viene percorso in aria, mentre EB in acqua. È noto che la velocità della luce in un mezzo omogeneo è costante; supponendo che l'aria e l'acqua attraversati dal raggio siano due mezzi omogenei, chiamiamo v_1 la velocità della luce nell'aria e v_2 la velocità della luce nell'acqua. L'obiettivo di Fermat può essere scomposto in due passi:

- determinare la funzione «tempo di percorrenza della spezzata AEB »;
- determinare il minimo di tale funzione.

Per quanto riguarda il primo obiettivo, dette a la misura della lunghezza di AH , b quella di BK , d quella di HK e indicata con x la misura della lunghezza di HE , applicando il teorema di Pitagora, si ha:

$$\overline{AE} = \sqrt{a^2 + x^2}; \quad \overline{EB} = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}.$$

Il tempo di percorrenza di AE è

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1},$$

mentre il tempo di percorrenza di BE è

$$t_2 = \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}.$$

La funzione «tempo di percorrenza della spezzata AEB » è quindi espressa dall'equazione:

$$f(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}.$$

Calcoliamo la sua derivata:

$$f'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}}.$$

Per il principio di Fermat, il valore di x cercato deve rendere minima $f(x)$, quindi deve essere

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}},$$

ossia:

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{\frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Il numeratore del primo membro è il coseno dell'angolo \widehat{AEH} , mentre il denominatore è il coseno dell'angolo \widehat{BEK} . Passando ai complementari degli angoli \widehat{AEH} e \widehat{BEK} , ossia agli angoli di incidenza i e di rifrazione r formati dai raggi incidente e rifratto con la normale alla superficie di separazione dei due mezzi, otteniamo la legge di rifrazione:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Il bravo bagnino

Il principio di Fermat può essere compreso meglio studiando questo problema, attribuito a Richard Feynman. Dalla spiaggia, il bagnino B vede il signor R che sta annegando in mare.

Perché, per salvarlo, non si muove in linea retta? Quale traiettoria deve seguire?

