MATEMATICA E STORIA

Uno studio di funzione... per i giovani

La funzione

$$x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$$

è tratta da *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*, opera del 1748 di Maria Gaetana Agnesi. In caso caso x rappresenta le ordinate, y le ascisse e a è un numero reale positivo.
Studia la funzione e rappresentala graficamente.

RISOLUZIONE

La funzione da studiare è:

$$x = \frac{y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3}{ay} = \frac{y^2(y-2a) - a^2(y-2a)}{ay} = \frac{(y^2-a^2)(y-2a)}{ay} = \frac{(y-a)(y+a)(y-2a)}{ay}.$$

- Il dominio è $y \neq 0$.
- La funzione non è periodica e non è né pari né dispari; posto infatti $x = f(y)$ abbiamo:

$$f(-y) = \frac{(y^2-a^2)(-y-2a)}{a(-y)} = \frac{(y^2-a^2)(y+2a)}{ay} \neq \pm f(y).$$

- Il numeratore si annulla, e quindi il grafico della funzione interseca l'asse delle ascisse, in $y = \pm a$ e in $y = 2a$ (ricorda che le x e le y sono «scambiate», cioè x rappresenta le ordinate e y le ascisse).
- Compiliamo il quadro segni. Risulta:

$$f(y) > 0 \text{ per } y < -a \ \vee \ 0 < y < a \ \vee \ y > 2a;$$

$$f(y) < 0 \text{ per } -a < y < 0 \ \vee \ a < y < 2a.$$

		−a		0		a		2a	
y − a	−		−		−	0	+		+
y + a	−	0	+		+		+		+
y − 2a	−		−		−		−	0	+
ay	−		−	0	+		+		+
f(y)	+	0	−	∄	+	0	−	0	+

- Determiniamo il comportamento della funzione agli estremi del dominio:

$$\lim_{y \to -\infty} f(y) = +\infty; \quad \lim_{y \to 0^-} f(y) = -\infty; \quad \lim_{y \to 0^+} f(y) = +\infty;$$

$$\lim_{y \to +\infty} f(y) = +\infty.$$

La funzione ammette asintoto verticale in $y = 0$; non presenta asintoto obliquo poiché il grado del numeratore supera di 2, e non di 1, quello del denominatore.

- Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda:

$$f'(y) = \frac{dy}{dx} = \frac{(3y^2 - 4ay - a^2)ay - (y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3)a}{a^2y^2} = \frac{2(y^3 - ay^2 - a^3)}{ay^2};$$

$$f''(y) = 2 \cdot \frac{(3y^2 - 2ay)ay^2 - (y^3 - ay^2 - a^3)2ay}{a^2y^4} = 2 \cdot \frac{y^3 + 2a^3}{ay^3}.$$

Studiamo per primo il segno della derivata seconda, più facile.
Il numeratore si annulla per $y = -a\sqrt[3]{2}$, è positivo a destra e negativo a sinistra; il denominatore è positivo per $y > 0$ e negativo per $y < 0$. Risulta quindi:

$$f''(y) = 0 \text{ per } y = -a\sqrt[3]{2};$$

$$f''(y) > 0 \text{ per } y < -a\sqrt[3]{2} \ \vee \ y > 0, \text{ concavità verso l'alto;}$$

$$f''(y) < 0 \text{ per } -a\sqrt[3]{2} < y < 0, \text{ concavità verso il basso.}$$

La funzione presenta un punto di flesso per $y = -a\sqrt[3]{2}$.

Per quanto riguarda la derivata prima, non riusciamo a studiare il segno del numeratore, ma possiamo fare i seguenti ragionamenti.

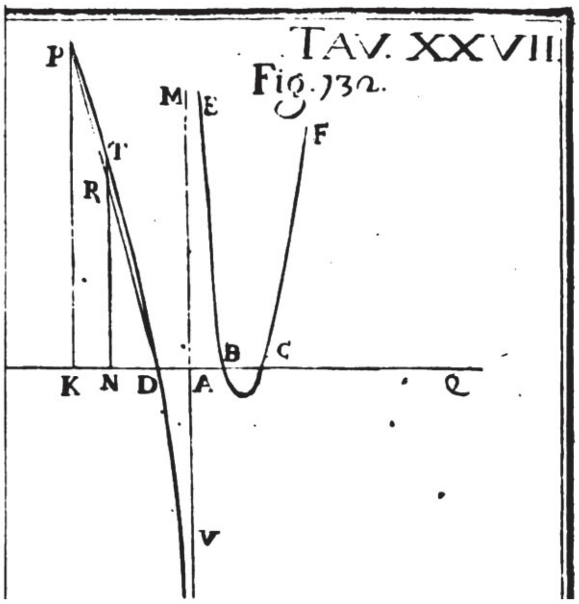
Calcoliamo innanzitutto:

$$f'(-a\sqrt[3]{2}) = \frac{2\left[(-a\sqrt[3]{2})^3 - a(-a\sqrt[3]{2})^2 - a^3\right]}{a(-a\sqrt[3]{2})^2} = \frac{2[-2a^3 - \sqrt[3]{4}\,a^3 - a^3]}{\sqrt[3]{4}\,a^3} < 0.$$

In ciascuno dei seguenti intervalli la funzione presenta dunque le seguenti caratteristiche:

- per $y < -a\sqrt[3]{2}$ è $f''(y) > 0$, quindi $f'(y)$ è crescente, con $f'(-a\sqrt[3]{2}) < 0$; risulta quindi $f'(y) < 0$ e $f(y)$ è decrescente;
- per $-a\sqrt[3]{2} < y < 0$ è $f''(y) < 0$, quindi $f'(y)$ è decrescente, con $f'(-a\sqrt[3]{2}) < 0$; risulta quindi $f'(y) < 0$ e $f(y)$ è decrescente;
- per $y > 0$ è $f''(y) > 0$, quindi $f(y)$ presenta sempre la concavità verso l'alto; poiché si annulla per $y = a$ e per $y = 2a$, la funzione ammette un minimo relativo di ascissa compresa fra a e $2a$.

Siamo in grado di tracciare il grafico approssimato della funzione. Riportiamo il grafico presente nell'opera originale, dove i valori di y si trovano sull'asse delle ascisse e i valori di x sull'asse delle ordinate. Nel grafico, $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BC} = a$.



ESERCIZIO IN PIÙ

Il completamento della Strega

Un'altra funzione che si trova nelle *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* è chiamata «Strega» nella traduzione inglese, «Versiera» nel testo originale; la sua equazione è la seguente:

$$y = a\sqrt{\frac{a-x}{x}},$$

dove a è un numero reale positivo.

Studia la funzione e rappresentala graficamente.

Risoluzione

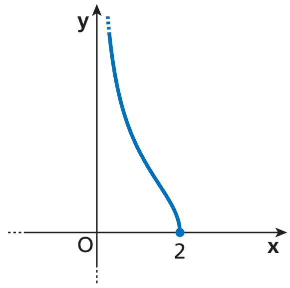
Il dominio della funzione è: $\frac{a-x}{x} \geq 0 \rightarrow 0 < x \leq a$.

La funzione interseca l'asse delle ascisse in $x = a$.
La funzione è sempre maggiore o uguale a zero per ogni valore del dominio.
Esiste l'asintoto verticale $x = 0$ per x che tende a 0 da destra.

La derivata prima è $y' = -\frac{a^2}{2x\sqrt{ax - x^2}}$; non si annulla mai, quindi non esistono punti di massimo o di minimo relativo.

La derivata seconda è $y'' = \dfrac{3a^3 - 4a^2x}{4x\sqrt{(ax - x^2)^3}}$; si annulla in $x = \dfrac{3}{4}a$; la funzione ammette punto di flesso in $\left(\dfrac{3}{4}a; \dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right)$ ed ha concavità verso l'alto per $0 < x < \dfrac{3}{4}a$, verso il basso per $\dfrac{3}{4}a < x < a$.

A titolo di esempio, disegniamo a lato il grafico nel caso $a = 2$.



La «Versiera» di Agnesi è oggi presentata come una curva «a campana», considerando la funzione inversa $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$ da cui otteniamo il grafico seguente (sempre nel caso $a = 2$).