## MATEMATICA E STORIA

# Integrali nella notazione d'oltremanica

$$\frac{bx^{m}\dot{x} + aax^{m-1}\dot{x}}{aa - bb}$$

**Integrali nella notazione d'oltremanica** La notazione usuale $\int f(x)\,dx$ che usiamo oggi per gli integrali è dovuta a Leibniz. Nella traduzione inglese di *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* (1748), di Maria Gaetana Agnesi, appare invece la notazione newtoniana. In questo caso si parla di «integrale completo» (anziché indefinito) e lo si indica facendo seguire il simbolo $\dot{x}$ alla funzione da integrare; per esempio, l'integrale completo di $f(x) = x$ si indica con $x\dot{x}$.

Ecco un passo preso dal libro III di Agnesi:

«Dunque, l'integrale completo di $\dot{x}$, per esempio, sarà $x \pm a$, dove $a$ indica una quantità costante. Quello di $x^2\dot{x}$ sarà $\frac{1}{3}x^3 \pm a$; e così via».

**a.** Trascrivi nella notazione di Leibniz i due esempi.

**b.** Calcola il seguente integrale:

$$\frac{bx^{m}\dot{x} + aax^{m-1}\dot{x}}{xx}.$$

## RISOLUZIONE

**a.** Poiché, nel formalismo attuale, è

$$\int dx = x + c \quad \text{e} \quad \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c,$$

con $c$ costante arbitraria, troviamo il seguente parallelismo:

$$\dot{x} \leftrightarrow \int dx \quad \text{e} \quad x^2\dot{x} \leftrightarrow \int x^2\,dx.$$

In generale, l'espressione $x^m\dot{x}$ può essere trascritta con integrale: $\int x^m\,dx$.

**b.** Trasformiamo l'espressione dell'esempio di Agnesi nel formalismo di Leibniz, e calcoliamo l'integrale:

$$\frac{bx^{m}\dot{x} + aax^{m-1}\dot{x}}{xx} = (bx^{m-2} + aax^{m-3})\dot{x} \leftrightarrow \int (bx^{m-2} + a^2x^{m-3})\,dx = \frac{bx^{m-1}}{m-1} + \frac{a^2x^{m-2}}{m-2} + c.$$

## ESERCIZIO IN PIÙ

Considera la seguente affermazione:

«$\frac{a\dot{x}}{x}$ ovvero $ax^{-1}\dot{x}$ il cui integrale, secondo le regole, sarebbe $\frac{ax^{-1+1}}{-1+1}$ ovvero $\frac{ax^0}{0}$, cioè infinito…».

**a.** Agnesi mostra le regole corrette per questo tipo di integrali:

«$-\frac{\dot{y}}{y}$; l'integrale sarebbe $-l\ y$.

E se fosse $-\frac{\dot{y}}{a+y}$, l'integrale sarebbe $-l\,\overline{a+y}$.

Se fosse $-\frac{\dot{y}}{a-y}$, l'integrale sarebbe $l\,\overline{a-y}$;

e se fosse $\frac{\dot{y}}{a-y}$, l'integrale sarebbe $-l\,\overline{a-y}$».

Trascrivi nella notazione di Leibniz i quattro calcoli riportati qui sopra.

**b.** Calcola il seguente integrale, utilizzando il suggerimento della stessa Agnesi:

«Sia, ad esempio, $\frac{x^3\dot{x}}{(x-a)^3}$. Posto $x - a = z$ […] facendo le sostituzioni …».

Copyright © 2017 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

## Risoluzione

**a.** Oggi scriviamo

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \ln y + c,$$

considerando l'argomento del logaritmo positivo, quindi:

$$-\frac{\dot{y}}{y} = -l\;y \leftrightarrow \int -\frac{dy}{y} = \ln y + c;$$

$$-\frac{\dot{y}}{a+y} = -l\,\overline{a+y} \leftrightarrow \int -\frac{dy}{a+y} = -\ln(a+y) + c;$$

$$-\frac{\dot{y}}{a-y} = l\,\overline{a-y} \leftrightarrow \int -\frac{dy}{a-y} = \ln(a-y) + c;$$

$$\frac{\dot{y}}{a-y} = -l\,\overline{a-y} \leftrightarrow \int \frac{dy}{a-y} = -\ln(a-y) + c.$$

**b.** Risolviamo l'integrale

$$\frac{x^3\dot{x}}{(x-a)^3} \leftrightarrow \int \frac{x^3}{(x-a)^3}\,dx$$

per sostituzione.
Posto $x - a = z$, risulta $dx = dz$, quindi:

$$\int \frac{x^3}{(x-a)^3}\,dx = \int \left(\frac{x}{x-a}\right)^3 dx = \int \left(\frac{a+z}{z}\right)^3 dz = \int \frac{z^3 + 3az^2 + 3a^2z + a^3}{z^3}\,dz =$$

$$\int \left(1 + \frac{3a}{z} + \frac{3a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3}\right) dz = z + 3a\ln z - \frac{3a^2}{z} - \frac{a^3}{2z^2} + c =$$

$$x - a + 3a\ln(x-a) - \frac{3a^2}{x-a} - \frac{a^3}{2(x-a)^2} + c.$$

Anche qui, come fa Agnesi, non abbiamo il valore assoluto nell'argomento del logaritmo, considerandolo sempre positivo.

Copyright © 2017 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone