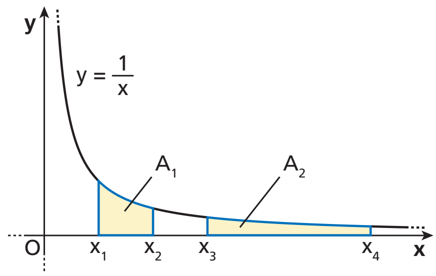
MATEMATICA E STORIA
Aree e iperbole

Il gesuita belga Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) fece una notevole scoperta riguardo all'iperbole di equazione $xy = 1$: se si scelgono k, x_1, x_2, x_3, x_4 tali che $x_3 = kx_1$ e $x_4 = kx_2$, allora le aree A_1 e A_2 sottostanti all'iperbole e delimitate dalle rette verticali passanti per x_1 e x_2 e per x_3 e x_4, come indicato in figura, risultano uguali.



Alphonse Antonio de Sarasa (1618-1667), un altro matematico gesuita, nato nelle Fiandre, fece un'altra osservazione sull'iperbole $xy = 1$; ripercorriamo i suoi ragionamenti rispondendo alle seguenti domande.

a. Indicati con α e β due numeri maggiori di 1, utilizza i risultati precedenti di Grégoire de Saint-Vincent per mostrare che l'area della zona sottostante all'iperbole compresa fra le rette di equazioni $x = 1$ e $x = \beta$ è uguale all'area della zona sottostatne all'iperbole compresa fra le rette $x = \alpha$ e $x = \alpha\beta$.

b. Considera la funzione $A(x)$, che esprime l'area della zona sottostante all'iperbole compresa fra 1 e x. Mostra che $A(\alpha\beta) = A(\alpha) + A(\beta)$.

c. Quale funzione a te nota gode di quest'ultima proprietà?

d. Attraverso l'utilizzo degli integrali, verifica la proprietà $A_1 = A_2$ individuata da Grégoire de Saint-Vincent.

RISOLUZIONE

a. Scelti $k = \alpha$, $x_1 = 1$, $x_2 = \beta$, otteniamo:

$$x_3 = kx_1 = \alpha \quad \text{e} \quad x_4 = kx_2 = \alpha\beta.$$

Per la proprietà di Grégoire de Saint-Vincent, l'area A_1 della zona sottostante all'iperbole $xy = 1$, compresa fra le rette di equazioni $x = x_1$ e $x = x_2$, cioè $x = 1$ e $x = \beta$, è uguale all'area A_2 della zona sottostante all'iperbole compresa fra le rette di equazioni $x = x_3$ e $x = x_4$, cioè $x = \alpha$ e $x = \alpha\beta$.

b. Per le posizioni fatte prima, abbiamo:

$$A_1 = A(x_2) = A(\beta);$$

$$A_2 = A(x_4) - A(x_3) = A(\alpha\beta) = A(\alpha).$$

Per la proprietà di Grégoire de Saint-Vincent, otteniamo:

$$A_1 = A_2 \rightarrow A(\beta) = A(\alpha\beta) - A(\alpha) \rightarrow A(\alpha\beta) = A(\alpha) + A(\beta).$$

c. In base alla proprietà applicata nel punto precedente, l'immagine, secondo la funzione $A(x)$, del *prodotto* di due valori è uguale alla *somma* delle immagini dei due valori.
Tra le funzioni note, una che soddisfa questa stessa proprietà è la funzione logaritmica (in qualunque base):

$$\log_a(\alpha \cdot \beta) = \log_a \alpha + \log_a \beta.$$

d. Calcoliamo mediante gli integrali definiti le aree A_1 e A_2:

$$A_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_{x_1}^{x_2} = \ln x_2 - \ln x_1 = \ln\frac{x_2}{x_1};$$

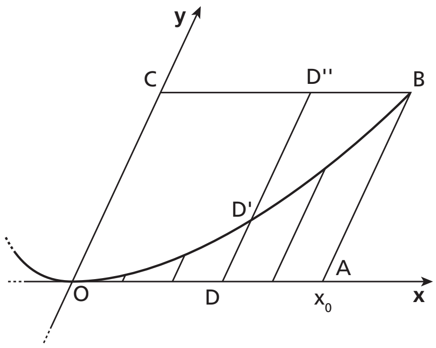
$$A_2 = \int_{x_3}^{x_4} \frac{1}{x}\,dx = \int_{kx_1}^{kx_2} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_{kx_1}^{kx_2} = \ln(kx_2) - \ln(kx_1) = \ln\frac{kx_2}{kx_1} = \ln\frac{x_2}{x_1}.$$

Ritroviamo l'uguaglianza $A_1 = A_2$.

ESERCIZIO IN PIÙ

Linee e integrali

Consideriamo la parabola di equazione $y = ax^2$. Il matematico e fisico francese Gilles Personnes de Roberval (1602-1675) riuscì a determinare l'area della superficie OAB, in figura, facendo riferimento a un numero inizialmente finito n di segmenti (la figura riporta il caso $n = 5$).



Anzitutto divise l'intervallo $[0; x_0]$ in n parti uguali di lunghezza $h = \frac{x_0}{n}$, e nei punti di divisione considerò le corrispondenti ordinate.

a. Esprimi, in funzione di h, le ascisse di ciascuno dei punti di divisione.

b. Scrivi la somma delle ordinate dei punti della parabola corrispondenti ai punti di divisione.

c. Con riferimento al parallelogramma $OABC$, esprimi la somma delle lunghezze dei segmenti del tipo DD'', cioè dei segmenti paralleli al lato AB e passanti per uno dei punti di divisione dell'intervallo $[0; x_0]$. Mostra che tale somma è uguale ad an^3h^2.

d. Determina il rapporto fra la somma ricavata nel punto **b** e quella ricavata nel punto **c**. Considerato che $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$, mostra che il rapporto è uguale a $\frac{1}{3} + \frac{1}{2+n} + \frac{1}{6n^2}$.

e. Roberval concluse che «per n infinito» l'area della superficie OAB è uguale a un terzo dell'area di $OABC$: giustifica questa conclusione.

Risoluzione

a. Se dividiamo l'intervallo $[0; x_0]$ in n parti uguali di ampiezza $h = \frac{x_0}{n}$, i punti di divisione hanno le seguenti ascisse:

$$x_1 = h, \qquad x_2 = 2h, \qquad x_3 = 3h, \qquad \ldots, \qquad x_n = nh = x_0.$$

b. La parabola ha equazione $y = ax^2$, quindi la somma delle ordinate dei punti della parabola corrispondenti a quelli di divisione è:

$$S_1 = ah^2 + a(2h)^2 + a(3h)^2 + \ldots + a(nh)^2 = ah^2 + 4ah^2 + 9ah^2 + \ldots + n^2ah^2 = (1 + 4 + 9 + \ldots + n^2)ah^2.$$

c. I segmenti di tipo DD'' sono n e sono tutti lunghi come AB, quindi la somma delle loro lunghezze è:

$$S_2 = n\overline{AB} = n \cdot a(nh)^2 = an^3h^2.$$

d. Il rapporto fra le due somme calcolate ai punti **b** e **c** vale:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{(1 + 4 + 9 + \ldots + n^2)ah^2}{an^3h^2} = \frac{1 + 4 + 9 + \ldots + n^2}{n^3}.$$

Poiché $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$, possiamo semplificare:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

e. Per n che tende a infinito, la somma S_1 tende all'area sottostante alla parabola nell'intervallo $[0; x_0]$, mentre la somma S_2 tende all'area del parallelogramma $OABC$. Il loro rapporto, per n che tende a infinito, individua quindi il rapporto fra l'area sottostante alla parabola e quella del parallelogramma, e risulta:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_1}{S_2} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$