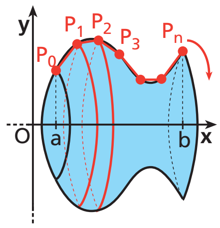
APPROFONDIMENTO

Area di una superficie di rotazione



Cone puoi ottenere l'area di una superficie di rotazione?

LA RISPOSTA

Area di una superficie di rotazione
Se la curva di equazione $y = f(x)$ viene fatta ruotare con una rotazione completa attorno all'asse x, si ottiene una superficie di rotazione.
Dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti e consideriamo la poligonale inscritta nella curva, che ha per vertici i punti $P_0, P_1, \ldots, P_n$ (come nella figura a lato). Nella rotazione completa attorno all'asse x, ogni segmento $P_{i-1}P_i$ della poligonale descrive un tronco di cono che ha come apotema $P_{i-1}P_i$ e come basi due cerchi rispettivamente di raggio $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$. La somma delle aree delle superfici laterali di questi tronchi di cono approssima l'area della superficie di rotazione.
Si dimostra che:

$$S = 2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Definizione
Data la funzione $y = f(x)$ derivabile nell'intervallo $[a; b]$, l'**area della superficie di rotazione** che si ottiene ruotando in una rotazione completa il grafico della funzione, limitato dalle rette di equazione $x = a$ e $x = b$, è:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Esempio
Calcoliamo l'area della superficie della sfera di raggio r, ottenuta dalla rotazione completa della semicirconferenza di equazione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ attorno all'asse x.
Calcoliamo l'area della superficie sferica utilizzando la definizione:

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx =$$

$$2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx = 2\pi \int_{-r}^{r} r\,dx =$$

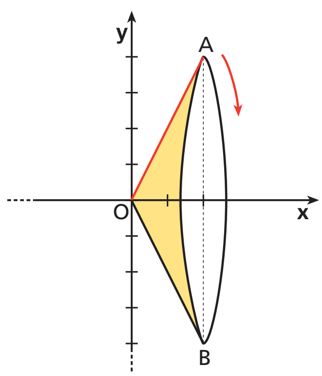
$$2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 2\pi r\,[x]_{-r}^{r} = 4\pi r^2.$$

ESERCIZI IN PIÙ

1 Calcoliamo l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x del segmento appartenente alla retta di equazione $y = 2x$ avente estremi di ascissa $x = 0$ e $x = 2$.

Risoluzione

- Disegniamo la superficie: tracciamo il grafico della retta nell'intervallo considerato e il suo simmetrico rispetto all'asse x.
  Tracciamo, in prospettiva, la circonferenza di diametro AB. Si ottiene così la superficie generata dalla rotazione completa intorno all'asse x del segmento OA.



- Scriviamo la derivata della funzione data: $y' = 2$. Calcoliamo l'area della superficie, applicando la formula

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx:$$

$$S = 2\pi \int_0^2 2x \cdot \sqrt{1+2^2}\, dx = 2\pi \int_0^2 2x \cdot \sqrt{5}\, dx = 2\pi\left[\sqrt{5}\, x^2\right]_0^2 = 8\pi\sqrt{5}.$$

Osservazione. Si ottiene lo stesso risultato utilizzando la formula per l'area laterale di un cono con raggio di base r e apotema a: $S = \pi r \cdot a$. In questo caso $r = y_A = 4$, $a = \overline{OA} = 2\sqrt{5}$:

$$S = \pi \cdot 4 \cdot 2\sqrt{5} = 8\pi\sqrt{5}.$$

Date le seguenti funzioni, determina l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x della parte del loro grafico compresa tra le rette indicate a fianco.

2 $y = 5x$, $x = 0$, $x = 1$. $[5\pi\sqrt{26}]$

3 $y = \sqrt{3}\,x + 1$, $x = 0$, $x = 2$. $[8\pi(\sqrt{3}+1)]$

4 $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x = -2$, $x = -1$. $[4\pi]$

5 $y = 2$, $x = 1$, $x = 4$. $[12\pi]$

6 $y = \sqrt{16 - x^2}$, $x = 2$, $x = 3$. $[8\pi]$

7 $y = 2\sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 3$. $\left[\frac{16\pi}{3}(4 - \sqrt{2})\right]$

8 $y = x^3$, $x = 0$, $x = 1$. $\left[\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1)\right]$

9 $y = 2\sqrt{x - 1}$, $x = 1$, $x = 4$. $\left[\frac{56\pi}{3}\right]$

10 Calcola l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x del segmento appartenente alla retta di equazione $y = 4$ avente estremi di ascissa $x = 1$ e $x = 5$. Qual è la superficie ottenuta? [32π, sup. lat. cilindro]

11 Calcola l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x del segmento appartenente alla retta di equazione $y = 3x$ avente estremi di ascissa $x = 0$ e $x = 1$. $[3\pi\sqrt{10}]$

12 Determina l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x del segmento appartenente alla retta di equazione $y = -x + 2$ situato nel primo quadrante. $[4\pi\sqrt{2}]$

13 Determina l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x dell'arco di circonferenza che ha centro $C(1; 0)$ e raggio 2 contenuto nel primo quadrante. $[12\pi]$

14 **Pesciolino rosso** Trova la misura, in m^2, della superficie esterna di una boccia per pesci rossi, sapendo che la base di appoggio ha una superficie inferiore all'apertura superiore e che la superficie laterale può essere individuata dalla rotazione di 360° attorno all'asse x della curva di equazione $y = \sqrt{9 - x^2}$ compresa tra le rette $x = -1$ e $x = 2$, avendo scelto 1 dm come unità di misura. [$\simeq 0{,}7\ m^2$]

15 **Alta quota** Il profilo di una montagna può essere schematizzato come la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse x dell'arco di curva di equazione $y = \frac{x^3}{4}$ compreso tra le rette $x = \frac{1}{2}$ e $x = 2$, avendo scelto 1 km come unità di misura. Se tale montagna è innevata solo sopra quota 1000 m e verdeggiante sotto, qual è la misura dell'area ricoperta da vegetazione? [$13{,}8\ km^2$]