

MATEMATICA E ARCHITETTURA

La torre Eiffel

Il simbolo di Parigi, costruito per l'Esposizione universale del 1889, è una struttura in ferro forgiato, alta 312 metri.

Perché Gustave Eiffel le ha dato proprio quella forma?



LA RISPOSTA

Chiunque sia salito in cima alla Torre Eiffel a Parigi ne è rimasto impressionato. A colpire non è solo la straordinaria visuale della Ville Lumière (o città delle luci) dall'alto, ma anche il sensibile ondeggiamento di tutta la struttura sotto la spinta del vento.

Viene da chiedersi come la Torre possa restare in piedi senza crollare

Era ciò che si domandava anche l'ingegnere Gustave Eiffel alla fine dell'Ottocento mentre progettava la Torre per l'Expo di Parigi.

Il profilo del monumento è stato dettato, più che da ragioni estetiche, da considerazioni di fisica e di matematica.

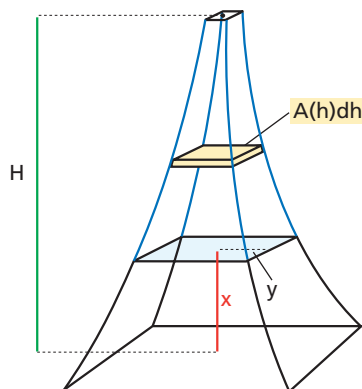
La cosa sorprendente è che esiste un'equazione dalla quale si può ricavare la sagoma della Torre Eiffel. È stata trovata nel 2004 da due ricercatori statunitensi, Patrick Weidman e Iosif Pinelis, che dopo quasi 120 anni hanno svelato il segreto dell'eleganza e della perfezione di quest'opera architettonica.

Dimestichezza con i numeri

Anche i modelli di calcolo dell'ingegner Eiffel si sono rivelati esatti: la Torre, nonostante sia alta più di 300 metri, è in grado di sopportare un vento che soffia fino a 800 km/h, una velocità irrealistica anche se un ciclone si abbattesse sulla capitale francese.

Il monumento ha una base quadrata di 125 metri di lato da cui si innalzano quattro pilastri che confluiscono in un'unica colonna, via via più sottile e concava al crescere dell'altezza. Eiffel studiò la sagoma sezione dopo sezione, calcolando per cia-

scuna il peso che la struttura doveva reggere. Trascurando l'effetto del vento, per ogni sezione questo peso coincide con quello della porzione di edificio sovrastante la sezione stessa (in blu nella figura).



Se ρ è la densità del ferro e $A(h)$ l'area della sezione quadrata alla quota generica h , allora il volume infinitesimale di uno strato di altezza dh è $A(h)dh$ (in giallo nella figura). Essendo g l'accelerazione di gravità, il peso della parte compresa fra x e l'altezza H della Torre è

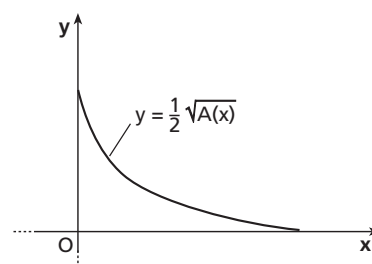
$$\int_x^H \rho \cdot g \cdot A(h) dh$$

e, considerato il peso massimo che la struttura sottostante può reggere, vale l'equazione

$$\int_x^H \rho \cdot g \cdot A(h) dh = P \cdot A(x),$$

dove P è la pressione massima che può essere sopportata. Risolvendo l'equazione, si ottiene $A(x)$, che è una funzione esponenziale.

$A(x)$ indica come varia la sezione orizzontale al variare dell'altezza e permette di ricavare il profilo della struttura, che può essere descritto dalla funzione del semilato y della sezione al variare della quota, ossia dalla funzione $y = \frac{1}{2} \sqrt{A(x)}$.



La sagoma della Torre Eiffel però non è esattamente esponenziale, anche se il suo profilo assomiglia a una curva esponenziale decrescente. Questo perché l'ingegnere Eiffel non trascurò la presenza del vento.

Una questione di equilibrio

La pressione che il vento esercita sulla Torre è un fattore molto importante per l'equilibrio del sistema. Come hanno determinato i due matematici statunitensi, che hanno studiato a fondo gli schizzi originali di Eiffel depositati presso la Società francese di ingegneria civile, affinché la struttura della Torre resti in equilibrio è necessario che la pressione del vento sia controbilanciata dalla tensione tra gli elementi della costruzione. Questo si traduce in un'equazione integrale non lineare abbastanza complessa, le cui soluzioni forniscono precisamente la sagoma della struttura, esponenziale a tratti, con due differenti esponenti.

Pubblicato sulla rivista dell'Accademia francese delle scienze *Comptes Rendus Mécanique*, lo studio ha spiegato anche perché la base della torre è così estesa: Eiffel non era proprio sicuro dei suoi calcoli (all'epoca non c'era l'aiuto dei computer) e preferì allargare la base esagerando un po', in modo da essere certo che, una volta eretta la Torre, il vento non l'avrebbe buttata giù.