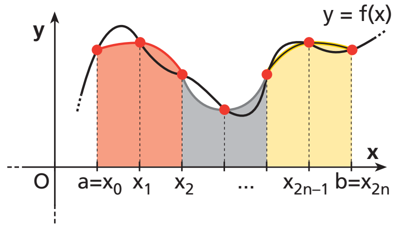
APPROFONDIMENTO
Metodo delle parabole

Per l'integrazione numerica si può anche utilizzare il **metodo delle parabole**, che si basa sull'approssimazione del grafico della funzione con archi di parabole.

Come si procede?

LA RISPOSTA

Il **metodo delle parabole** consiste nell'approssimare il grafico della funzione con archi di parabola opportunamente scelti. Ciascun arco è individuato da tre punti del grafico e il valore approssimato dell'integrale si determina calcolando la somma delle aree dei trapezoidi delimitati da tali archi.



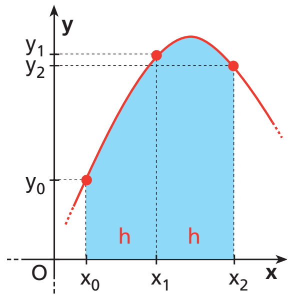
Teorema

L'area S di un trapezoide avente come base l'intervallo $[x_0; x_2]$ e delimitato dal grafico di una parabola passante per i punti $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, dove

$$x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$$

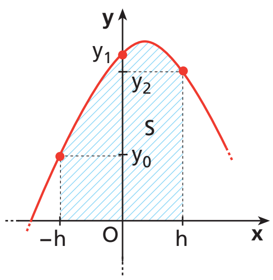
è il punto medio dell'intervallo, è data dalla seguente formula:

$$S = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2), \text{ dove } h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1.$$



Dimostrazione

Riferiamo la parabola a un sistema traslato che abbia l'asse y coincidente con la retta $x = x_1$. I corrispondenti dei punti $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ sono rispettivamente $(-h; y_0)$, $(0; y_1)$, $(h; y_2)$. Sia $y = Ax^2 + Bx + C$ l'equazione della parabola nel nuovo riferimento.



Determiniamo, per sostituzione, la relazione fra i coefficienti e le coordinate dei tre punti:

$$\begin{aligned}
(-h; y_0) &\rightarrow y_0 = Ah^2 - Bh + C;\\
(0; y_1) &\rightarrow y_1 = C;\\
(h; y_2) &\rightarrow y_2 = Ah^2 + Bh + C.
\end{aligned}$$

Esprimiamo $y_0 + 4y_1 + y_2$ in funzione di A, B e C:

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = (Ah^2 - Bh + C) + 4C + (Ah^2 + Bh + C) = 2Ah^2 + 6C.$$

Ora calcoliamo l'area S in funzione di A, B, C:

$$S = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} = \ldots = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

Essendo $2Ah^2 + 6C = y_0 + 4y_1 + y_2$, otteniamo:

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

La formula è così dimostrata.

Per applicare il metodo delle parabole procediamo nel modo seguente:

- dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in $2n$ parti uguali di ampiezza $h = \frac{b-a}{2n}$, mediante i punti $x_0 = a$, x_1, x_2, …, $x_{2n} = b$ (il numero delle parti in cui si suddivide l'intervallo deve essere pari, perché si utilizza una parabola ogni due intervalli);

- calcoliamo i corrispondenti valori della funzione: $f(a)$, y_1, y_2, …, y_{2n-2}, y_{2n-1}, $f(b)$;
- consideriamo gli intervalli $[a; x_2]$, $[x_2; x_4]$, …, $[x_{2n-4}; x_{2n-2}]$, $[x_{2n-2}; b]$ e i corrispondenti centri x_1, x_3, …, x_{2n-3}, x_{2n-1};
- applichiamo a ciascuno di essi la formula del teorema precedente, e calcoliamo così le aree delimitate dagli archi di parabola passanti per ciascuna terna di punti $(x_i; y_i)$, $(x_{i+1}; y_{i+1})$, $(x_{i+2}; y_{i+2})$:

$$\frac{h}{3}\cdot[f(a)+4y_1+y_2],$$
$$\frac{h}{3}\cdot(y_2+4y_3+y_4),$$
$$\ldots,$$
$$\frac{h}{3}\cdot[y_{2n-2}+4y_{2n-1}+f(b)];$$

- infine, determiniamo in modo approssimato l'integrale calcolando la somma delle aree precedenti:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\cdot[f(a)+f(b)+2\cdot(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})+ 4\cdot(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})].$$

Questa formula si chiama **formula di Cavalieri-Simpson**.
Se la funzione ammette derivata quarta continua, si dimostra che l'errore E_n commesso è minore o uguale alla quantità

$$\varepsilon_n = \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\cdot M,$$

dove M è il massimo di $\left|f^{(4)}(x)\right|$ in $[a; b]$.

Esempio
Consideriamo l'integrale $\int_2^3 x^3\,dx$.

Con la formula di Cavalieri-Simpson determiniamo un valore approssimato, valutiamo l'errore e confrontiamo il risultato ottenuto con quello esatto. Utilizziamo sempre la suddivisione in 10 parti uguali e riorganizziamo la tabella.

a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	b
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
$f(a)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	$f(b)$
8	9,261	10,648	12,167	13,824	15,625	17,576	19,683	21,952	24,389	27

Ora applichiamo la formula di Cavalieri-Simpson:

$$\int_2^3 x^3\,dx \simeq \frac{3-2}{3\cdot 10}\cdot[8+27+2\cdot(10{,}648+\ldots+21{,}952)+4\cdot(9{,}261+\ldots+ 24{,}389)] = 16{,}250.$$

Osserviamo che la derivata quarta $f^{(4)}(x)$ è nulla per ogni $x \in [2; 3]$ e quindi anche l'errore commesso è nullo. Il risultato ottenuto, infatti, coincide con il valore esatto dell'integrale.

La formula di Cavalieri-Simpson non fornisce sempre il valore esatto, ma è più precisa della formula dei trapezi e delle formule dei rettangoli: a parità di passo di integrazione fornisce in generale il valore più vicino a quello esatto.
È possibile valutare l'errore commesso senza calcolare derivate, utilizzando il **metodo di Runge** o del **raddoppiamento del passo**: detto N_1 il valore dell'integrale calcolato con il metodo delle parabole suddividendo l'intervallo in $2n$ parti, si procede dimezzando il numero di intervalli, ovvero raddoppiando l'ampiezza di ciascun intervallo (n deve essere pari). Si applica di nuovo la formula di Cavalieri-Simpson, ottenendo un valore N_2. Si può dimostrare che l'errore di N_1 è:

$$E \simeq \frac{|N_1-N_2|}{15}.$$

ESERCIZI IN PIÙ

1 Determiniamo un valore approssimato di $\int_1^2 (x^4+1)\,dx$, utilizzando la formula di Cavalieri-Simpson. Valutiamo l'errore e confrontiamo il risultato ottenuto con l'integrale esatto.

Risoluzione

Utilizziamo la suddivisione in $2n = 10$ parti uguali e organizziamo la tabella:

$$h = \frac{2-1}{10} = 0,1.$$

a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	b
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(a)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	$f(b)$
2,00000	2,46410	3,07360	3,85610	4,84160	6,06250	7,55360	9,35210	11,49760	14,03210	17,00000

Ora applichiamo la formula di Cavalieri-Simpson:

$$\int_1^2 (x^4+1)\,dx \simeq \frac{2-1}{30}[2,00000 + 17,00000 + 2(3,07360 + \ldots + 11,49760) +$$

$$4(2,46410 + \ldots + 14,03210)] \simeq 7,20001.$$

Ricordiamo che, se la funzione ammette derivata quarta continua, l'errore commesso E_n è minore o uguale alla quantità ε_n, ossia:

$$E_n \leq \varepsilon_n = \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot M, \quad \text{dove } M \text{ è il massimo di } \left| f^{(4)}(x) \right| \text{ in } [a; b].$$

$f^{(4)}(x) = 24$ per ogni $x \in [1; 2]$, possiamo valutare l'errore:

$$E_{10} \leq \varepsilon_{10} = \frac{(2-1)^5}{2880 \cdot 5^4} \cdot 24 = 0,000013 = 1,3 \cdot 10^{-5}.$$

Pertanto, il risultato dell'integrale ha un'approssimazione minore o uguale a $1,3 \cdot 10^{-5}$. Calcolando l'integrale in modo esatto, otteniamo:

$$\int_1^2 (x^4+1)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} + x\right]_1^2 = \frac{32}{5} + 2 - \frac{1}{5} - 1 = \frac{36}{5} = 7,20.$$

Il risultato approssimato coincide con il valore esatto dell'integrale fino alla quarta cifra decimale: la formula di Cavalieri-Simpson ha permesso di ottenere un'ottima precisione.

Utilizzando la formula di Cavalieri-Simpson, calcola il valore approssimato dei seguenti integrali e valuta l'errore. Confronta il risultato con quello del calcolo esatto. (Suddividi l'intervallo nel numero 2*n* di parti indicato a fianco.)

2 $\int_3^6 (3x^3 + 2x - 3)\,dx$, $\quad 2n = 10.$ $\quad$ [929,25; 0]

3 $\int_1^3 e^{-x}\,dx$, $\quad 2n = 10.$ $\quad$ $[0,318095; 6,54 \cdot 10^{-6}]$

4 $\int_1^4 \sqrt[5]{x}\,dx$, $\quad 2n = 6.$ $\quad$ $[3,5649; 8,4 \cdot 10^{-4}]$

5 $\int_1^5 \ln x\,dx$, $\quad 2n = 10.$ $\quad$ $[4,047; 3,4 \cdot 10^{-3}]$

6 La seguente tabella raccoglie i dati inerenti alla forza F (misurata in newton) applicata a un corpo e alla posizione del corpo s (in metri). Utilizzando il metodo delle parabole, calcola il valore approssimato del lavoro compiuto dalla forza per spostare il corpo di 1 m. Valuta l'errore commesso.

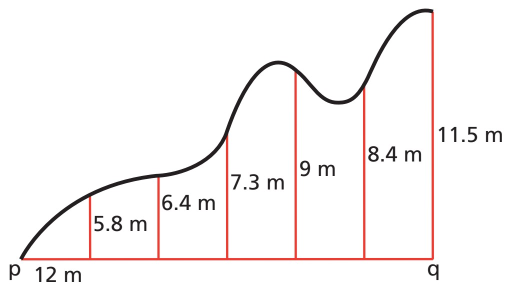
***s* (m)**	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
***F* (N)**	0	0,05	0,15	0,42	0,70	1,18	1,70	2,30	2,68

$[0,9825 \text{ J}; 1,72 \cdot 10^{-3} \text{ J}]$

7 The outline of a plot of land is shown in the sketch. At intervals of 12 m along *pq*, perpendicular measurements 5.8 m, 6.4 m, 7.3 m, 9 m, 8.4 m, 11.5 m are made to the top boundary. Use Simpson's Rule to estimate the area of the plot, correct to the nearest square meter.

(IR *Leaving Certificate Examination*, Ordinary Level)

[$A \simeq 513$ m^2]



Calcolo dell'errore con il metodo di Runge

8 Calcoliamo con la formula di Cavalieri-Simpson un valore approssimato dell'integrale $\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx$. Per valutare l'errore commesso, utilizziamo il metodo di Runge.

Risoluzione

Suddividiamo l'intervallo [0; 1] in 8 parti e compiliamo la tabella di calcolo.

x_i	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
y_i	1	0,87671	0,76190	0,65979	0,57143	0,49612	0,43243	0,37870	0,33333

Applicando la formula di Cavalieri-Simpson, otteniamo:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx \simeq 0{,}60459 = N_1.$$

Dimezziamo il numero di intervalli raddoppiando il passo. La tabella risulta modificata come segue.

x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
y_i	1	0,76190	0,57143	0,43243	0,33333

Applicando nuovamente la formula di Cavalieri-Simpson, otteniamo il seguente risultato:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx \simeq 0{,}60446 = N_2.$$

Stimiamo l'errore:

$$E \simeq \frac{|N_1 - N_2|}{15} = \frac{|0{,}60459 - 0{,}60446|}{15} \simeq 0{,}00001.$$

Utilizzando la formula di Cavalieri-Simpson, calcola il valore approssimato dei seguenti integrali e valuta l'errore con il metodo di Runge. (Suddividi l'intervallo in 8 parti.)

9 $\int_2^4 \sqrt{x}\,dx$ [$3{,}447714; 1{,}1 \cdot 10^{-6}$]

10 $\int_1^2 (\ln x + x)\,dx$ [$1{,}886292; 2{,}16 \cdot 10^{-6}$]

11 $\int_0^1 e^{2x}\,dx$ [$3{,}1946; 6{,}7 \cdot 10^{-5}$]

12 $\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx$ [$0{,}6671; 2{,}9 \cdot 10^{-4}$]

13 $\int_{-2}^0 \frac{x+2}{x^3-1}\,dx$ [$-1{,}4564; 5{,}77 \cdot 10^{-4}$]

14 $\int_2^4 \frac{x^4+2x}{3x+1}\,dx$ [$19{,}3217725; 7{,}9 \cdot 10^{-7}$]

15 $\int_{-1}^1 (x+2)\sqrt{x+3}\,dx$ [$7{,}089546; 2{,}89 \cdot 10^{-6}$]

16 $\int_1^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$ [$1{,}83582; 8{,}55 \cdot 10^{-5}$]

17 $\int_0^4 \ln(x^2+1)\,dx$ [$5{,}985; 1{,}77 \cdot 10^{-3}$]

18 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx$ [$0,238294; 6,25 \cdot 10^{-6}$]

19 Utilizzando il metodo delle parabole, calcola un valore approssimato dell'integrale della funzione definita dalla seguente tabella. Con il metodo di Runge valuta l'errore commesso.

x_i	10	10,2	10,4	10,6	10,8	11	11,2	11,4	11,6
y_i	3	5	7	9	8	6	4	2	1

[$8,667; 8,9 \cdot 10^{-3}$]

20
a. Studia la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - 9}$ e disegna il grafico.
b. Con la formula di Cavalieri-Simpson calcola un valore approssimato dell'integrale $\int_{-\frac{8}{5}}^{\frac{8}{5}} f(x)\,dx$, dividendo l'intervallo in 8 parti.
c. Con il metodo di Runge valuta l'errore commesso. [b) $I = -6,256226\ldots$; c) $E = 0,0039\ldots$]

21 È data la curva $f(x) = \frac{ax}{x^3 + b}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a. Dopo aver determinato i coefficienti a e b in modo che la curva passi per il punto $A(1; 1)$ e abbia come asintoto la retta $x = -1$, disegna il grafico.
b. Mediante il metodo di Cavalieri-Simpson dividi l'intervallo in 8 parti e calcola un valore approssimato dell'area della regione finita di piano che la curva e l'asse x delimitano nell'intervallo $[0; 2]$.
c. Con il metodo di Runge stima l'errore commesso al punto precedente.
[a) $a = 2, b = 1$; b) $1,447531\ldots$; c) $E = 0,00064\ldots$]