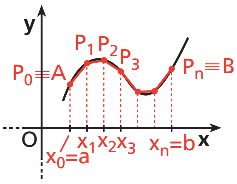
APPROFONDIMENTO

Lunghezza dell'arco di una curva



Come puoi ottenere la lunghezza di un arco di curva mediante un integrale?

LA RISPOSTA

Consideriamo una funzione $f(x)$ derivabile con derivata continua nell'intervallo $[a; b]$ e disegniamo il suo grafico.

Consideriamo l'arco $\overset{\frown}{AB}$ della curva e la poligonale che ha per vertici i punti $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$, con P_0 coincidente con A e P_n coincidente con B. La lunghezza l_n della poligonale inscritta nella curva può essere calcolata sommando le distanze fra i punti $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$:

$$l_n = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \ldots + \overline{P_{n-1}P_n}.$$

Poiché i punti $P_0, P_1, \ldots, P_n$ hanno coordinate

$$P_0(x_0; f(x_0)), P_1(x_1; f(x_1)), \ldots, P_n(x_n; f(x_n)),$$

allora per ogni $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ la lunghezza del segmento $P_{i-1}P_i$ risulta:

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

Essendo la funzione derivabile in $[a; b]$, applichiamo il teorema di Lagrange in ogni intervallo $[x_{i-1}; x_i]$ per $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\exists c_i \in]x_{i-1}; x_i[\text{ tale che } f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$

cioè

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Allora la lunghezza del segmento $P_{i-1}P_i$ risulta:

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)]^2(x_i - x_{i-1})^2} = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}.$$

Se indichiamo con Δx_i l'espressione $x_i - x_{i-1}$, la lunghezza della poligonale è:

$$l_n = \Delta x_1\sqrt{1 + [f'(c_1)]^2} + \Delta x_2\sqrt{1 + [f'(c_2)]^2} + \ldots + \Delta x_n\sqrt{1 + [f'(c_n)]^2}.$$

Essa dipende dal numero n di suddivisioni e dai punti scelti per la suddivisione. Tanto minore è l'ampiezza degli intervalli $[x_{i-1}; x_i]$, tanto meglio la poligonale approssima la curva.

Essendo per ipotesi $f'(x)$ continua, quando la massima ampiezza degli intervalli Δx_{max} tende a zero, tutte le lunghezze l_n, ottenute scegliendo in qualsiasi modo la suddivisione dell'intervallo $[a; b]$, tendono all'integrale definito della funzione $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ esteso all'intervallo $[a; b]$:

$$l = \lim_{\Delta x_{max} \to 0} l_n = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Definizione

Data la funzione $y = f(x)$ derivabile con derivata continua nell'intervallo $[a; b]$, la **lunghezza della curva** che rappresenta il grafico della funzione, limitata dalle rette di equazioni $x = a$ e $x = b$, è:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Esempio

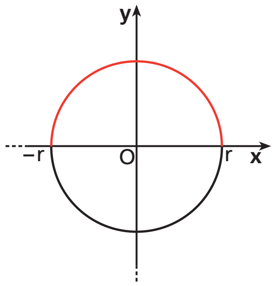
Calcoliamo la lunghezza della circonferenza di raggio r.

Poiché la circonferenza centrata nell'origine di raggio r ha equazione $x^2 + y^2 = r^2$, la semicirconferenza i cui punti hanno ordinata positiva corrisponde al grafico della funzione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ nell'intervallo $[-r; r]$.

Tale funzione ha derivata:

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Allora, applicando la formula della lunghezza di una curva, otteniamo:



$$l=\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\int_{-r}^{r}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=r\int_{-r}^{r}\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,dx=$$

$$r\cdot\left[\arcsin\frac{x}{r}\right]_{-r}^{r}=r\cdot\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]=\pi r.$$

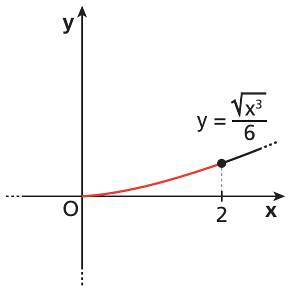
Ritroviamo dunque per la lunghezza della circonferenza il valore $2\pi r$.

ESERCIZI IN PIÙ

1 Calcoliamo la lunghezza del ramo di curva di equazione $y=\frac{\sqrt{x^3}}{6}$ compreso fra i punti di ascissa $x=0$ e $x=2$.

Risoluzione

Disegniamo la curva.
Calcoliamo la derivata:



$$D\left[\frac{\sqrt{x^3}}{6}\right]=D\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6}\right]=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{x}}{4}.$$

Calcoliamo la lunghezza del ramo di curva con la formula

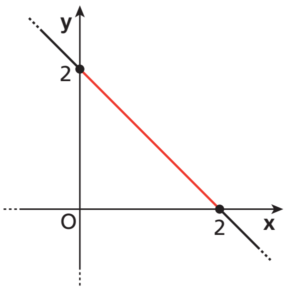
$\ell=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$ con $a=0$, $b=2$.

$$l=\int_0^2\sqrt{1+\frac{x}{16}}\,dx=\int_0^2\sqrt{\frac{16+x}{16}}\,dx=\frac{1}{4}\int_0^2\sqrt{16+x}\,dx=\frac{1}{4}\left[\frac{(16+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2=$$

$$\frac{1}{6}\left[(16+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{1}{6}\left(\sqrt{18^3}-\sqrt{16^3}\right)=\frac{1}{6}(54\sqrt{2}-64)=9\sqrt{2}-\frac{32}{3}$$

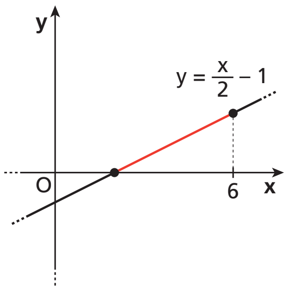
Calcola la lunghezza della parte di grafico evidenziata nelle seguenti figure, sia geometricamente sia utilizzando gli integrali, e verifica che si ottiene lo stesso risultato.

2



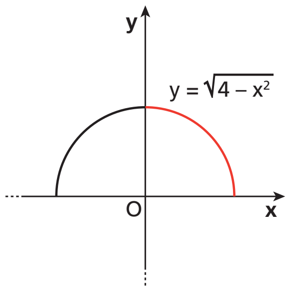
$[2\sqrt{2}]$

3



$[2\sqrt{5}]$

4



$[\pi]$

5 Trova la distanza tra i punti $A(1;5)$ e $B(9;20)$ sia con la formula della distanza sia con l'integrazione. $[17]$

Date le seguenti funzioni, determina la lunghezza della parte del loro grafico compresa fra i punti di ascissa indicati a fianco.

6 $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-1,\quad x=0,\quad x=3.$ $\left[\frac{14}{3}\right]$

7 $y=\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3},\quad x=-2,\quad x=-1.$ $\left[\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right]$

8 $y=\sqrt{x^3},\quad x=0,\quad x=1.$ $\left[\frac{13}{27}\sqrt{13}-\frac{8}{27}\right]$

9 $y=\sqrt{1-x^2},\quad x=0,\quad x=1.$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

10 $y = \sqrt{9 - x^2}$, $x = -3$, $x = 3$. $[3\pi]$

11 $y = x^2$, $x = 0$, $x = 2$. $\left[\sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln\left(4 + \sqrt{17}\right)\right]$

12 $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$, $x = 1$, $x = 3$. $\left[\frac{53}{6}\right]$

13 **Servizio taxi** Davide prende un taxi per andare dalla città A alla città B percorrendo l'unica strada che le collega, che può essere schematizzata con la curva di equazione $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 1$.

a. Se il taxi costa 0,90 €/km, quanto spenderà Davide?

b. Se il taxi procede a una velocità media di 60 km/h, quanti minuti impiegherà per arrivare a destinazione?

$[\text{a}) \simeq € \, 15,60; \text{b}) \simeq 17']$