MATEMATICA INTORNO A NOI

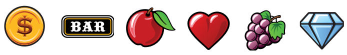
Conviene giocare?

Esistono tanti tipi di slot machine, ma tutte si basano sullo stesso tipo di procedimento: si inseriscono i soldi, i rulli iniziano a ruotare e si fermano in modo casuale indipendentemente l'uno dall'altro.

Con l'aiuto di una slot semplificata proviamo a capire se questo gioco è equo.

APPROFONDIMENTO

Supponiamo che la nostra slot semplificata abbia 3 rulli e che in ogni rullo compaiano 25 simboli di 6 tipi diversi nelle quantità indicate sotto.



x 1 x 2 x 4 x 5 x 6 x 7

Per giocare bisogna inserire 1 euro.

Indicando con x la vincita minima, la tabella delle possibili vincite è la seguente.

	$10x$
	$8x$
	$4x$
	$3x$
	$2x$
	x

Vogliamo calcolare qual è la vincita minima affinché il gioco sia equo.

Indichiamo con V la variabile aleatoria che rappresenta le vincite lorde. Abbiamo, perciò, per esempio:

$$p(V = x) = p(\text{escono 3 diamanti}) = \frac{7^3}{25^3}; \qquad p(V = 2x) = p(\text{escono 3 grappoli}) = \frac{6^3}{25^3}.$$

La distribuzione di V è la seguente.

V	x	$2x$	$3x$	$4x$	$8x$	$10x$	0
f	$\frac{7^3}{25^3}$	$\frac{6^3}{25^3}$	$\frac{1}{5^3}$	$\frac{4^3}{25^3}$	$\frac{2^3}{25^3}$	$\frac{1^3}{25^3}$	$1 - \frac{757}{25^3}$

Impostiamo la condizione di equità. Il gioco è equo se il valore medio delle vincite lorde di V è uguale alla posta, cioè a 1 euro.

$$x \cdot \frac{7^3}{25^3} + 2x \cdot \frac{6^3}{25^3} + 3x \cdot \frac{5^3}{25^3} + 4x \cdot \frac{4^3}{25^3} + 8x \cdot \frac{2^3}{25^3} + 10x \cdot \frac{1}{25^3} = 1$$

Risolviamo l'equazione:

$$\frac{x}{25^3}(7^3 + 2 \cdot 6^3 + 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 4^3 + 8 \cdot 2^3 + 10) = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1480}{25^3}x = 1 \quad \rightarrow \quad x \simeq 10,56.$$

La vincita minima dovrebbe essere di 10,56 euro.

In realtà questi giochi non sono equi. Sono nati per far guadagnare chi li propone! In base alle nostre leggi, le vincite (ossia la speranza di vincita), su un ciclo di non più di 140 000 partite, devono essere almeno pari al 74% della posta giocata.

Supponiamo che la nostra slot machine ponga come vincita minima 10 euro e vediamo se sarebbe a norma di legge. Il valore medio di V deve essere almeno pari al 74% della posta giocata, cioè al 74% di 1 euro:

$$\frac{1480}{25^3}x = 0,74 \quad \rightarrow \quad x \simeq 7,81.$$

La nostra slot è a norma di legge. La speranza di vincita del giocatore è data dalla differenza tra la posta richiesta e la posta in caso di equità, cioè $10 - 10,56 = -0,56$: il giocatore perde, in media, 0,56 euro a partita.

Consideriamo ora il caso in cui una persona inizia a giocare inserendo 1 euro a ogni partita.
Qual è la probabilità che dopo 10 partite il giocatore abbia perso 10 euro? Qual è la vincita netta media che può ottenere in 11 partite, se nelle prime 10 non è uscita alcuna combinazione vincente?

Calcoliamo la probabilità di non vincere nulla in una partita. Non si vince nulla, anzi si perde 1 euro, se non si ha alcuna combinazione vincente, quindi la probabilità richiesta è:

$$p = 1 - \frac{1}{25^3}(7^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 2^3 + 1) = 1 - \frac{757}{25^3} \simeq 0,95.$$

Se il giocatore perde 10 euro in 10 partite, vuol dire in che in ognuna delle dieci partite non ha avuto alcuna combinazione vincente. Quindi la probabilità cercata è:

$$p(\text{perdere 10 euro in 10 partite}) = p^{10} \simeq 0,61.$$

A pensarci bene c'è più del 50% delle possibilità di perdere 10 euro in pochi minuti.

Il giocatore ha già perso 10 partite, quindi ha già perso 10 euro, e per giocare l'undicesima partita deve inserire un altro euro.
L'undicesima partita è indipendente da quelle precedenti, cioè la probabilità che esca una combinazione vincente non dipende dal fatto che sia uscita oppure no nelle partite precedenti.
La variabile casuale X che rappresenta le vincite nette all'undicesima partita, dopo le prime dieci perse, ha perciò la seguente distribuzione.

X	-11	-1	9	19	29	69	89
f	$\frac{14868}{25^3}$	$\frac{7^3}{25^3}$	$\frac{6^3}{25^3}$	$\frac{1}{5^3}$	$\frac{4^3}{25^3}$	$\frac{2^3}{25^3}$	$\frac{1^3}{25^3}$

Abbiamo perciò:

$$M(X) = \frac{1}{25^3}(-11 \cdot 14868 - 1 \cdot 7^3 + 9 \cdot 6^3 + 19 \cdot 5^3 + 29 \cdot 4^3 + 69 \cdot 2^3 + 89) \simeq -10,05.$$

La speranza di vincita è negativa! Comunemente si pensa che, dopo 10 partite sfortunate, sia maggiore la probabilità che l'undicesima sia fortunata e in questo modo si possano recuperare i soldi giocati. In realtà, non è proprio così, nemmeno con una slot machine che dà una speranza di vincita ben più alta di quella minima imposta dallo Stato.