MATEMATICA E STORIA

999 palline bianche e nere

L'astronomo e statistico belga Lambert-Adolphe-Jacques Quetelet (1796-1874), in una sua pubblicazione del 1846, esaminò la situazione di un'urna contenente un gran numero di palline, metà delle quali bianche, le altre nere. Considerò l'estrazione casuale di 999 palline e determinò la probabilità di ottenere 500 palline nere (e 499 bianche), 501 nere, 502 nere e così via. Dato che la distribuzione è simmetrica, calcolò effettivamente solo i valori corrispondenti ai casi con più palline nere che bianche.

a. Esprimi la probabilità $P(n)$ di ottenere n palline nere, supponendo di estrarre in tutto 999 palline, con reinserimento della pallina estratta.

La determinazione di $P(n)$ per ogni n avrebbe richiesto calcoli davvero gravosi, così Quetelet abbreviò la procedura calcolando le probabilità relative, cioè pose il valore di $P(500)$ uguale a 1.

b. Esprimi $P(n+1)$ in funzione di $P(n)$ e verifica che $P(501) = \frac{499}{501} \cdot P(500)$.

c. Considerando l'ipotesi $P(500) = 1$, determina, come fece Quetelet, i valori approssimati alla sesta cifra decimale di $P(501)$ e $P(502)$.

RISOLUZIONE

a. Poiché le palline bianche e quelle nere sono contenute in ugual numero dentro l'urna, la probabilità di estrarre una pallina nera è $\frac{1}{2}$, così come la probabilità dell'evento contrario (estrazione di una pallina bianca). La probabilità $P(n)$ di estrarre n palline nere in 999 estrazioni (con reinserimento) è dunque:

$$P(n) = \binom{999}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{999-n} = \binom{999}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{999}.$$

b. Per quanto ricavato al punto precedente, abbiamo:

$$P(n+1) = \binom{999}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{999} = \frac{999!}{(n+1)!(999-n-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{999} =$$

$$\frac{999-n}{n+1} \cdot \frac{999!}{n!(999-n)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{999} = \frac{999-n}{n+1} \cdot \binom{999}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{999} = \frac{999-n}{n+1} \cdot P(n).$$

In particolare, risulta:

$$P(501) = \frac{999-500}{500+1} \cdot P(500) = \frac{499}{501} \cdot P(500).$$

c. Calcoliamo:

$$P(501) = \frac{499}{501} \cdot P(500) = \frac{499}{501} \cdot 1 = \frac{499}{501} = 0,996008;$$

$$P(502) = P(501+1) = \frac{999-501}{501+1} \cdot P(501) = \frac{498}{502} \cdot \frac{499}{501} = 0,988072.$$

ESERCIZIO IN PIÙ

La rappresentazione grafica
Quetelet osservò che era utile calcolare solamente la parte centrale della distribuzione, poiché le probabilità dei termini distanti dal centro erano estremamente piccole, e si limitò a trovare i valori fino a $P(579)$.

a. Verifica i valori di $P(503)$, $P(504)$, $P(505)$, ponendo sempre $P(500) = 1$, riportati nella colonna di destra della seguente tabella, che rappresenta una parte di quella originale.

GROUPES DE	ÉCHELLE de possibilité. — PROBABILITÉ relative du tir. de chaque groupe. Table C.
499 boules blanches et 500 noires. .	1.000000
498 id. 501 id. . .	0.996008
497 id. 502 id. . .	0.988072
496 id. 503 id. . .	0.976285
495 id. 504 id. . .	0.960789
494 id. 505 id. . .	0.941764
493 id. 506 id. . .	0.919429
492 id. 507 id. . .	0.894040
491 id. 508 id. . .	0.865882
490 id. 509 id. . .	0.835261
489 id. 510 id. . .	0.802506
488 id. 511 id. . .	0.767956
487 id. 512 id. . .	0.731958
486 id. 513 id. . .	0.694860
485 id. 514 id. . .	0.657008
484 id. 515 id. . .	0.618736
483 id. 516 id. . .	0.580364
482 id. 517 id. . .	0.542197
481 id. 518 id. . .	0.504516
480 id. 519 id. . .	0.467576
479 id. 520 id. . .	0.431609
478 id. 521 id. . .	0.396815
477 id. 522 id. . .	0.363366
476 id. 523 id. . .	0.331407

b. Ricordando che la distribuzione è simmetrica, utilizza i dati in tabella per realizzare un diagramma avente in ascisse il numero di palline nere da 476 a 523.

Risoluzione

a. Operando come nell'esercizio precedente, calcoliamo:

$$P(503) = \frac{999-502}{503} \cdot P(502) = \frac{497}{503} \cdot \frac{498}{502} \cdot \frac{499}{501} = 0{,}976285;$$

$$P(504) = \frac{999-503}{504} \cdot P(503) = \frac{496}{504} \cdot \frac{497}{503} \cdot \frac{498}{502} \cdot \frac{499}{501} = 0{,}960789;$$

$$P(505) = \frac{999-504}{505} \cdot P(504) = \frac{495}{505} \cdot \frac{496}{504} \cdot \frac{497}{503} \cdot \frac{498}{502} \cdot \frac{499}{501} = 0{,}941764.$$

b. Riportiamo la rappresentazione grafica tratta dall'opera originale di Quetelet, in cui viene utilizzata una versione estesa della tabella precedente.