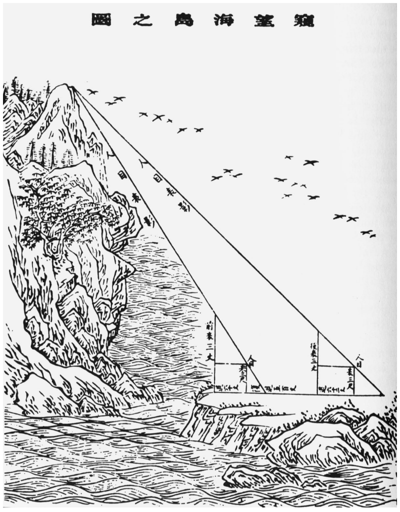
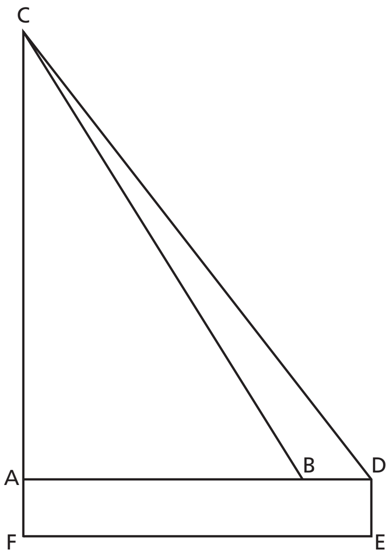
MATEMATICA E STORIA

L'altezza di un monte

Il problema illustrato nell'immagine riguarda il calcolo dell'altezza di un monte che si trova sopra un'isola. Problemi simili sono stati affrontati dai matematici di tutto il mondo: saper calcolare l'altezza o le dimensioni di oggetti difficilmente accessibili era in effetti fondamentale. Vi si cimentarono matematici cinesi, indiani (per esempio Aryabhata, matematico indiano del V-VI secolo), arabi (X-XI secolo) ed europei.





Questo è il problema espresso in termini moderni: «Calcolare $\overline{CF}$ sapendo che $A\widehat{B}C = 58°$, $A\widehat{D}C = 32°$, $\overline{BD} = 100$, $\overline{AF} = 1,5$».

Per risolvere il problema puoi utilizzare la seguente traccia di risoluzione:

- scrivi le tangenti dei due angoli come rapporto fra cateti;
- considera come incognite le lunghezze di *AB* e *AC*;
- ricava la lunghezza di *AC* e quindi quella di *AF*, da cui puoi ricavare quella di *CF*.

RISOLUZIONE

Possiamo scrivere $\tan 58° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ e $\tan 32° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$. Dato che $\overline{AD} = \overline{AB} + 100$, si hanno due equazioni con due incognite: $\tan 58° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ e $\tan 32° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB} + 100}$. Dalla prima si ottiene $\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \tan 58°$, e quindi, sostituendo nella seconda uguaglianza, $\tan 32° = \frac{\overline{AB} \cdot \tan 58°}{\overline{AB} + 100}$.

Da quest'ultima equazione $\tan 32° \cdot (\overline{AB} + 100) - \overline{AB} \cdot \tan 58° = 0$, da cui si ricava $\overline{AB} = \frac{100 \cdot \tan 32°}{\tan 58° - \tan 32°}$.

Si ottiene così: $\overline{AB} \simeq 64,06$; $\overline{AC} \simeq 64,06 \cdot \tan 58° \simeq 102,49$; $\overline{CF} \simeq 1,5 + 102,49 = 103,99$.

ESERCIZIO IN PIÙ

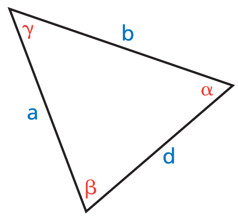
Osserva l'immagine tratta da *Mathesis biceps vetus et nova* del vescovo spagnolo Juan Caramuelis (1606-1682). Soffermati sui due misuratori (uno a destra e uno a sinistra del soldato che sta indicando la torretta al di là dello specchio d'acqua). Supponi che abbiano misurato due angoli interni del triangolo che ha i vertici nei punti di stazionamento dei loro strumenti e in corrispondenza della torretta, e che sia nota la loro distanza reciproca.

a. Come si può calcolare la distanza di ciascuno dei misuratori dalla torretta?

b. Assegna tu le ampiezze dei due angoli e la distanza fra i misuratori e calcola poi le distanze di questi ultimi dalla torretta; fa' in modo che i valori risultino verosimili rispetto alla situazione illustrata nell'immagine.

Risoluzione

a. Indichiamo con d la distanza tra i due misuratori e con a e b le distanze dalla torretta rispettivamente del primo e del secondo, con α l'angolo rilevato dal primo, con β quello rilevato dal secondo, con γ il terzo angolo interno del triangolo in figura. Per il teorema dei seni si ha: $\frac{a}{\sin\beta} = \frac{d}{\sin\gamma}$, da cui $a = d\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$; analogamente $b = d\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$.



b. Se $d = 100$ m, $\alpha = 85°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 20°$, si ha: $a = 100\frac{\sin 85°}{\sin 20°} \simeq 291$;

$b = 100\frac{\sin 75°}{\sin 20°} \simeq 282$.