MATEMATICA E STORIA

Prima Tycho, poi Enrico

Fin dal XVI secolo, nei principali osservatori astronomici e, in particolare, in quello danese di Tycho Brahe venivano utilizzate formule goniometriche e tavole di seni e coseni per effettuare calcoli astronomici. Qualcosa del genere l'ha fatto anche Enrico Fermi, che nel 1918, nella sua prova di ammissione alla Scuola Normale di Pisa, calcolò tan 35° senza tavole.

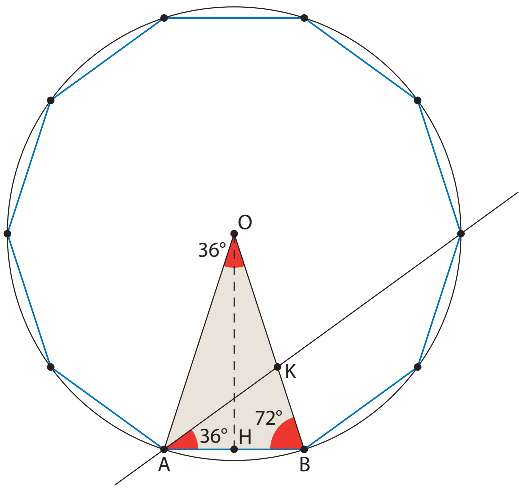
Com'è possibile trovare tan 35° senza strumenti di calcolo e tavole?

LA RISPOSTA

L'idea di Fermi si basa sull'uso delle formule di sottrazione della tangente e sul fatto che per angoli piccoli di misura α in gradi, $\tan \alpha°$ è bene approssimata dalla misura dell'angolo α in radianti, ossia da $\frac{\pi}{180} \cdot \alpha°$.

In particolare, Fermi scrive tan 35° come tan (36° − 1°). Innanzitutto, determiniamo tan 36° considerando il lato AB del decagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio 1 (figura **a**). L'angolo al centro $A\widehat{O}B$ misura la decima parte dell'angolo giro, ossia 36°. Poiché il triangolo AOB è isoscele sulla base AB, i suoi angoli alla base sono congruenti e misurano quindi 72°.

Consideriamo ora la bisettrice AK dell'angolo alla base OAB.



a

Il triangolo OKA è un triangolo isoscele, avendo gli angoli alla base OA che misurano entrambi 36°. Quindi $\overline{AK} = \overline{OK}$. Inoltre i triangoli AKB e AOB hanno gli angoli congruenti e perciò sono simili.

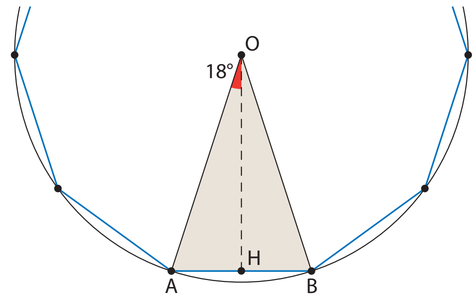
Possiamo impostare la proporzione $\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{AB}}$, da cui si ottiene: $\overline{AB}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{BK}$.

Indicando la misura del lato AB del decagono regolare con x e ricordando che il raggio della circonferenza misura 1, abbiamo che $\overline{BK} = \overline{OB} - \overline{OK}$, ossia, essendo $\overline{OK} = \overline{AK} = \overline{AB}$, risulta $\overline{BK} = 1 - x$.

L'uguaglianza $\overline{AB}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{BK}$ si traduce nell'equazione $x^2 = 1 \cdot (1 - x)$, la cui soluzione positiva è

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Passiamo ora alla determinazione della tangente dell'angolo $A\widehat{O}B$ (figura **b**).



b

$$\tan 18° = \frac{\overline{AH}}{\overline{OH}}.$$

Per quanto dimostrato: $\overline{AH} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ e

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Quindi $\tan 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$.

Usiamo ora le formule di duplicazione della tangente:

$$\tan 36° = \frac{2 \tan 18°}{1 - \tan^2 18°} = \frac{2\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}}{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\right)^2} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cdot \frac{10 + 2\sqrt{5}}{4(1 + \sqrt{5})},$$

da cui, con opportune razionalizzazioni, otteniamo:

$$\tan 36° = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \simeq 0{,}727.$$

Considerando tan 35° = tan (36° − 1°), applichiamo le formule di sottrazione della tangente ottenendo:

$$\tan 35° = \tan(36° - 1°) = \frac{\tan 36° - \tan 1°}{1 + \tan 36° \cdot \tan 1°}.$$

Come Fermi scrisse nella sua brillante risoluzione, «essendo 1° un numero assai piccolo, si può porre con grande approssimazione $\tan 1° \simeq \frac{\pi}{180} \simeq 0{,}0174$».

Infine, sostituendo i valori trovati per tan 36° e tan 1° in $\frac{\tan 36° - \tan 1°}{1 + \tan 36° \cdot \tan 1°}$, abbiamo $\tan 35° \simeq 0{,}700$.

Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone