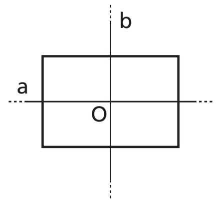
MATEMATICA E STORIA
Il gruppo di Klein



Nel suo Programma di Erlangen (il programma di ricerca illustrato all'atto dell'insediamento universitario) il matematico tedesco Felix Klein (1849-1925) introdusse il collegamento fra la geometria e la teoria dei gruppi. Consideriamo per esempio l'insieme I delle isometrie che trasformano un rettangolo in se stesso; i suoi elementi sono:

- la rotazione r di 180° rispetto al centro O;
- la simmetria s_a rispetto all'asse a;
- la simmetria s_b rispetto all'asse b;
- l'identità i.

L'operazione di composizione di isometrie, indicata con $\circ$, è interna nell'insieme I, è associativa, ammette l'elemento neutro e ogni isometria di I ammette l'elemento inverso secondo questa operazione. La struttura algebrica $(I, \circ)$ è chiamata *gruppo di Klein*.

a. Compila la tabella dell'operazione $\circ$ nell'insieme I.

b. Qual è l'elemento neutro dell'operazione $\circ$?

c. Qual è l'elemento inverso di r, cioè quale isometria va composta con r in modo da ottenere l'identità? Qual è l'elemento inverso di s_a? E quello di s_b?

RISOLUZIONE

a. Compiliamo la tabella dell'operazione.

$\circ$	i	s_a	s_b	r
i	i	s_a	s_b	r
s_a	s_a	i	r	s_b
s_b	s_b	r	i	s_a
r	r	s_b	s_a	i

Per esempio, la composizione $s_b \circ s_a$ ha lo stesso effetto della rotazione r, e nella tabella troviamo $s_b \circ s_a = r$ in corrispondenza della terza riga e della quarta colonna.

b. Osserviamo la tabella: qualunque isometria x di I, composta con la trasformazione identica i, restituisce la trasformazione x stessa.
Per esempio: $s_a \circ i = i \circ s_a = s_a$, $r \circ i = i \circ r = r$ e così via.
L'identità i è dunque l'elemento neutro dell'operazione composizione $\circ$.

c. Dalla tabella rileviamo anche che $r \circ r = i$, pertanto l'elemento inverso di r è r stesso (componendo due volte consecutive l'isometria r, otteniamo la trasformazione identica).
In modo analogo: $s_a \circ s_a = i$, $s_b \circ s_b = i$, quindi l'elemento inverso di s_a è s_a e l'elemento inverso di s_b è s_b.

ESERCIZIO IN PIÙ

Proprietà del gruppo di Klein

Proseguiamo nell'analisi del gruppo di Klein.

a. Cosa ottieni componendo ciascuna delle isometrie del gruppo con se stessa?

b. Considera la composizione di due qualsiasi delle isometrie r, s_a, s_b: cosa ottieni?

Considera tre generici elementi, x, y, z, del gruppo di Klein.

c. Vale la proprietà commutativa $x \circ y = y \circ x$?

d. Verifica che vale la proprietà associativa $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

e. Risolvi le seguenti equazioni:

1. $s_a \circ r \circ x = i$;
2. $s_b \circ x \circ s_b = i$;
3. $s_b \circ x \circ s_b = r$;
4. $s_a \circ x \circ s_b = r \circ x$;
5. $s_a \circ x \circ s_b = s_a \circ x$;
6. $s_a \circ x \circ x = s_b \circ x$.

Risoluzione

a. Dalla ricerca degli elementi inversi fatta nell'esercizio precedente abbiamo ricavato che, componendo ciascuna delle isometrie del gruppo con se stessa, si ottiene l'identità (questo aspetto si riflette nel fatto che sulla diagonale principale della tabella dell'operazione compare sempre e solo l'identità i).

b. Esaminiamo la tabella della composizione. Notiamo che, componendo due qualsiasi delle isometrie r, s_a, s_b, si ottiene la terza trasformazione.
Per esempio: $r \circ s_a = s_b$, $s_a \circ s_b = r$ e così via.

c. La tabella della composizione è simmetrica rispetto alla diagonale principale, quindi la composizione è un'operazione commutativa.
Per esempio: $r \circ s_a = s_a \circ r$, $s_a \circ s_b = s_b \circ s_a$ e così via.

d. La composizione di isometrie, come la composizione di funzioni in generale, è un'operazione associativa. Infatti, indicate con x, y, z tre isometrie qualunque del gruppo di Klein e con p un punto del piano, abbiamo:

$$(x \circ y) \circ z(p) = (x \circ y)(z(p)) = x(y(z(p))),$$

$$x \circ (y \circ z)(p) = x((y \circ z)(p)) = x(y(z(p))).$$

In alternativa, potevamo mostrare che per ogni terna di isometrie x, y, z le due trasformazioni $(x \circ y) \circ z$ e $x \circ (y \circ z)$ coincidono. Per esempio:

$$(s_a \circ s_b) \circ r = r \circ r = i \text{ e } s_a \circ (s_b \circ r) = s_a \circ s_a = i,$$

$$(r \circ s_b) \circ r = s_a \circ r = s_b \text{ e } r \circ (s_b \circ r) = r \circ s_a = s_b,$$

e così via.

e. Risolviamo le varie equazioni.

1. $s_a \circ r \circ x = i \quad \rightarrow \quad s_b \circ x = i$.
   Esaminando la tabella della composizione, o ricordando quanto detto al punto **a**, ricaviamo allora:
   $x = s_b$.
2. Poiché la composizione è anche un'operazione commutativa, come detto al punto **c**, abbiamo:
   $s_b \circ x \circ s_b = i \quad \rightarrow \quad s_b \circ s_b \circ x = i \quad \rightarrow \quad i \circ x = i \quad \rightarrow \quad x = i$.
3. $s_b \circ x \circ s_b = r \quad \rightarrow \quad s_b \circ s_b \circ x = r \quad \rightarrow \quad i \circ x = r \quad \rightarrow \quad x = r$.
4. $s_a \circ x \circ s_b = r \circ x \quad \rightarrow \quad s_a \circ s_b \circ x = r \circ x \quad \rightarrow \quad r \circ x = r \circ x$.
   L'equazione è dunque soddisfatta per ogni isometria di I (è un'identità).
5. $s_a \circ x \circ s_b = s_a \circ x \quad \rightarrow \quad s_a \circ s_b \circ x = s_a \circ x \quad \rightarrow \quad r \circ x = s_a \circ x$.
   Dalla tabella della composizione rileviamo che, comunque si scelga l'isometria x, le trasformazioni $r \circ x$ e $s_a \circ x$ sono diverse. L'equazione è dunque impossibile.
6. $s_a \circ x \circ x = s_b \circ x \quad \rightarrow \quad s_a \circ (x \circ x) = s_b \circ x \quad \rightarrow \quad s_a \circ i = s_b \circ x \quad \rightarrow \quad s_a = s_b \circ x \quad \rightarrow \quad x = r$.