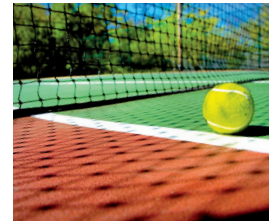


MATEMATICA INTORNO A NOI

L'ombra di Pitagora

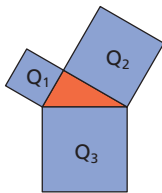
Se si espone ai raggi solari un reticolato a maglie rettangolari, l'ombra che esso proietta per terra è una figura formata non da rettangoli, ma da parallelogrammi. Questo non è un caso: poiché i raggi del Sole che giungono sulla Terra possono essere considerati paralleli, simulano molto bene le affinità, ossia trasformazioni geometriche che conservano l'allineamento fra punti, il parallelismo fra rette e il rapporto fra aree. Se esponiamo ai raggi solari una figura che illustra il teorema di Pitagora, che cosa accade alla sua ombra?



LA RISPOSTA

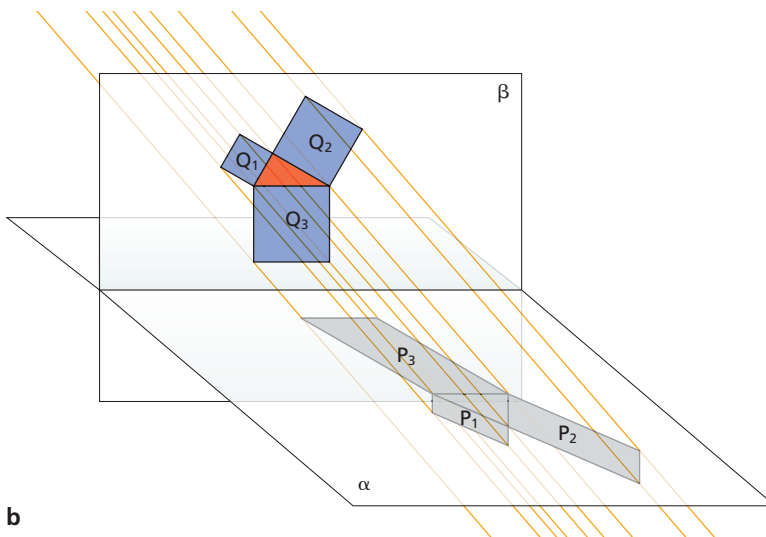
Consideriamo il triangolo rettangolo ABC e i tre quadrati costruiti, rispettivamente, sull'ipotenusa e sui cateti (figura **a**).

Immaginiamo di esporre ai raggi solari la figura pitagorica così costruita; che tipo di ombra proietta?



a

È possibile realizzare questa esperienza costruendo la figura con un cartoncino per poi esporla ai raggi del Sole e osservare l'ombra proiettata sul pavimento al variare dell'inclinazione del piano che contiene la figura (nella figura **b** il piano β contenente la figura pitagorica è perpendicolare al piano α sul quale viene raccolta l'ombra prodotta dai raggi solari simulati dalle rette in giallo).



b

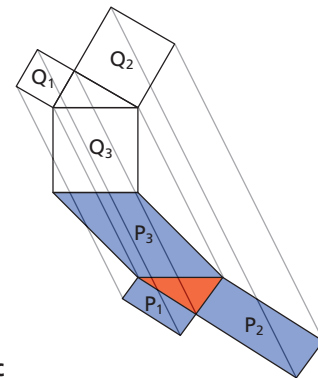
L'ombra della figura pitagorica non è, in generale, costituita da un triangolo rettangolo e da tre quadrati, ma da un triangolo qualsiasi sui cui lati sono costruiti tre parallelogrammi.

Tutto ciò non è strano: le affinità conservano l'allineamento tra punti, il parallelismo e il rapporto fra le aree di figure che si corrispondono nella trasformazione, ma non conservano le misure. In particolare non conservano le misure angolari e, quindi, la perpendicolarità fra rette (figura **c**).

Si dice anche che la perpendicolarità fra rette non è un concetto di cui si occupa la geometria affine.

Che cosa possiamo dire, però, della relazione pitagorica? Il parallelogramma costruito sull'ombra dell'ipotenusa è ancora equivalente alla somma dei parallelogrammi costruiti sulle ombre dei cateti?

La risposta è affermativa, perché, in un'affinità, il rapporto fra le aree di due figure corrispondenti è un invariante.



c

Ciò vuol dire che il rapporto fra ciascuno dei quadrati della figura pitagorica e il parallelogramma che costituisce la sua ombra è costante. Chiamiamo k tale costante, Q_1 , Q_2 , Q_3 le misure delle aree dei quadrati costruiti rispettivamente sui due cateti e sull'ipotenusa e P_1 , P_2 , P_3 quelle dei parallelogrammi che costituiscono le ombre, rispettivamente, di Q_1 , Q_2 , Q_3 .

Per la relazione pitagorica:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2.$$

Per la proprietà secondo cui il rapporto delle aree di figure che si corrispondono in un'affinità è costante, si ha:

$$P_1 = kQ_1, \quad P_2 = kQ_2, \quad P_3 = kQ_3.$$

Se moltiplichiamo per k entrambi i membri di $Q_3 = Q_1 + Q_2$, otteniamo $kQ_3 = kQ_1 + kQ_2$, ossia

$$P_3 = P_1 + P_2.$$

Ciò dimostra che, nell'ombra della figura pitagorica, la somma delle aree dei parallelogrammi costruiti su due lati del triangolo è uguale all'area del parallelogramma costruito sul lato maggiore.