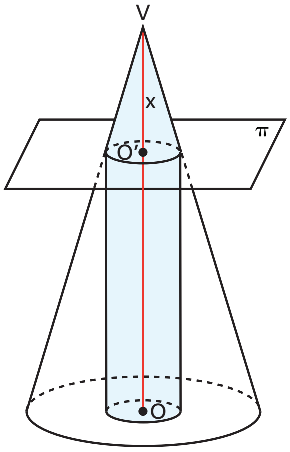
MATEMATICA AL COMPUTER
Geometria solida



Il cono nella figura ha altezza 10 cm e raggio di base di 3 cm. È intersecato dal piano π parallelo alla sua base e distante x dal vertice. Proiettando l'intersezione tra piano e cono sulla base del cono si ottiene un cilindro.
Determiniamo x affinché il rapporto fra i volumi del solido colorato nella figura e del cono di partenza sia k. Rispondiamo ponendo $k = 0,40$.

RISOLUZIONE

- Sul quaderno svolgiamo l'analisi del problema, scrivendo le grandezze coinvolte nel calcolo dei volumi in funzione di x e inserendole nelle formule dei volumi:

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi 3^2 10; \qquad V_{\text{cilindro}} = \pi\left(\frac{3}{10}x\right)^2(10-x); \qquad V_{\text{cono superiore}} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{10}x\right)^2 x.$$

Scriviamo il rapporto:

$$k = \frac{\pi\left(\frac{3}{10}x\right)^2(10-x) + \pi\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}x\right)^2 x}{\frac{1}{3}\pi 3^2 10}.$$

Operiamo qualche semplificazione:

$$k30 = \left(\frac{3}{10}x\right)^2(10-x) + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}x\right)^2 x.$$

- Attiviamo Wiris e digitiamo in un blocco l'istruzione necessaria per effettuare la sostituzione di k e per ottenere le eventuali soluzioni dell'equazione.

risolvere(sostituire($k \cdot 30 = \left(\frac{3}{10}\cdot x\right)^2 \cdot (10-x) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{10}\cdot x\right)^2 \cdot x$, k, 0.40), x) → {{x=−3.3054}, {x=4.3293}, {x=13.976}}

- La facciamo svolgere con *Calcola* e Wiris sostituisce il valore 0,40 a k, risolve la corrispondente equazione di terzo grado e ci mostra le tre soluzioni. Precisiamo allora che, affinché la figura abbia significato, la distanza x deve appartenere all'intervallo [0; 10], pertanto l'unica soluzione accettabile è $x = 4{,}3293$.

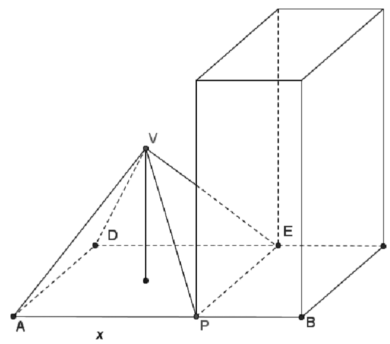
ESERCIZI IN PIÙ

1 Con un lingotto di metallo di 380 cm^3 di volume si desidera costruire un solido formato da un prisma esagonale regolare di lato x e di altezza x, sovrastato da una sfera di diametro $d = x + k$. Dopo aver assegnato un valore a k, determina x. Rispondi ponendo $k = 0$ cm, $k = 2$ cm, $k = 4$ cm.
[$x = 4{,}9560$, $x = 4{,}4976$, $x = 3{,}7464$]

2 Una sfera di raggio x è inscritta in una piramide retta a base quadrata di lato $l = 10$ m e altezza $h = kl$. Dopo aver assegnato un valore a k, determina x.
Rispondi ponendo $k = \frac{1}{2}$, $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $k = 1$. [$x = 2{,}0711$, $x = 2{,}8868$, $x = 3{,}0902$]

3 Con un'asta ST lunga 10 m si formano l'altezza SV di un cono circolare retto e il diametro VT di una sfera. Determina la posizione del punto V, vertice del cono ($\overline{SV} = x$), in modo che i volumi dei due solidi siano in rapporto k. Rispondi ponendo $k = 0{,}5$, $k = 1$, $k = 2$. [$x = 5{,}5410$, $x = 6{,}3052$, $x = 6{,}9680$]

4 Determina la posizione del punto P ($\overline{AP} = x$) appartenente al segmento AB lungo 10 m, in modo che i volumi dei due solidi in figura (una piramide retta di base quadrata $APED$, di vertice V e di altezza $h = 5$ m e il parallelepipedo di base $PBCE$ e di altezza $10 + k$ m) abbiano volumi equivalenti.
Rispondi con $k = 0$ m, $k = 5$ m, $k = 10$ m.
Trova anche, nei tre casi, i valori di x che rendono massima la somma dei due volumi.



[$x = 8,57 \vee x = 0$, $x_{max} = 6$; $x = 9 \vee x = 0$, $x_{max} = 5,625$; $x = 9,23 \vee x = 0$, $x_{max} = 5,45$]

5 Determina la posizione del punto P ($\overline{AP} = x$) appartenente alla base AB del rettangolo $ABCD$ di dimensioni 10 cm $\times$ 4 cm, in modo che il segmento PE, parallelo ad AD, divida $ABCD$ in due rettangoli, con i quali formare rispettivamente la superficie laterale di un cilindro e quella di un prisma regolare a base triangolare, entrambi di altezza AD e tali che il rapporto dei loro volumi valga k. Rispondi con $k = 0,50$, $k = 1$, $k = 2$.
Trova anche il valore di x che rende minima la somma dei due volumi.

[$x = 5,2373$, $x = 4,3743$, $x = 3,5476$; $x = 3,7679$]

6 Due barattoli di 5 cm di altezza hanno uno la forma di un cilindro di raggio di base $r = 3$ cm, al quale è stata tolta alla base la calotta sferica di raggio r e altezza x, e l'altro di un tronco di cono avente il raggio della base minore $r_1 = kx$ cm e quello della base maggiore $r_2 = r$. Dopo aver assegnato un valore a k, determina x in modo che i volumi dei due solidi siano equivalenti.
Rispondi con $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$. [$x = 2,1613$, $x = 1,2852$, $x = 0,9038$]