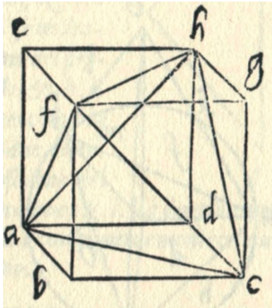
MATEMATICA E STORIA

Un corpo a facce triangolari

Nel suo *Euclide megarense*, Niccolò Tartaglia scrive:

«Dentro a un proposto cubo, possemo designare el corpo che ha quatro base triangole, de lati equali».

Il «corpo che ha quatro base triangole» costituisce un tetraedro; riportiamo nella figura a fianco la costruzione proposta dalla stesso Tartaglia.



a. Quanti e quali sono i vertici del tetraedro?

b. Quanti e quali sono gli spigoli del tetraedro? Perché possiamo affermare che il tetraedro ha i «lati equali»?

c. Quante e quali sono le facce del tetraedro? Sono congruenti?

d. Verifica la relazione di Eulero sia nel caso del cubo sia in quello del tetraedro.

e. A questo punto, un gioco facile: è possibile realizzare quattro triangoli equilateri con sei stuzzicadenti?

RISOLUZIONE

a. I vertici del cubo sono indicati dallo stesso Tartaglia con le lettere a, b, c, d, e, f, g, h.
I vertici del tetraedro sono quattro: a, c, f, h.

b. Gli spigoli del tetraedro sono sei, individuati dai segmenti ac, af, fc, ah, fh e ch.
Gli spigoli del tetraedro costituiscono le diagonali delle facce del cubo, pertanto sono tutti congruenti.

c. Le facce del tetraedro sono quattro, rappresentate dai triangoli acf, ach, afh, cfh.
I triangoli sono tutti equilateri, con il lato individuato dalla diagonale della faccia del cubo, quindi le facce del tetraedro sono congruenti.

d. Indichiamo con V, S, F rispettivamente il numero dei vertici, quello degli spigoli e quello delle facce di un poliedro.
Per il cubo abbiamo: $V = 8$, $S = 12$, $F = 6$;
per il tetraedro abbiamo: $V = 4$, $S = 6$, $F = 4$.
In entrambi i casi vale la relazione di Eulero: $F + V - S = 2$.

e. Il tetraedro suggerisce la risposta al problema...

ESERCIZIO IN PIÙ

Tetraedro e ottaedro

Sempre nell'*Euclide megarense*, Tartaglia scrive:

«Dentro a un dato corpo di quatro base triangolare equilatere, possemo descrivere un corpo di otto base triangolare equilatere».

Tartaglia asserisce quindi che possiamo individuare un ottaedro scegliendo opportuni punti di un tetraedro. Per individuare l'ottaedro, «divideremo cadauno di sei lati […] in due parti equali», determinando i loro punti medi f, g, h, k, l, m. Congiungeremo poi ciascuno dei punti medi con altri quattro punti medi: il punto f con g, h, k, l; il punto g con f, h, l, m e così via.

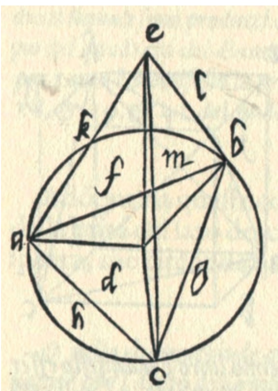


Figura originale di Tartaglia.

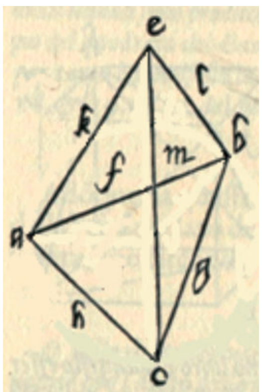


Figura ottenuta da quella originale a sinistra eliminando alcune parti che riguardano un ragionamento di Tartaglia che qui non viene esaminato.

a. Completa la seguente tabella facendo riferimento alla figura di destra della pagina precedente.

Il punto medio...	lo congiungiamo con...
f	g, h, k, l
g	f, h, l, m
h	
k	
l	
m	

b. Considerate le ripetizioni presenti in tabella, determina quanti sono gli spigoli dell'ottaedro.

c. Individua le facce dell'ottaedro, indicando per ciascuna i suoi vertici.

d. Verifica la relazione di Eulero anche nel caso dell'ottaedro.

e. Giustifica il fatto che le facce dell'ottaedro sono «triangolare equilatere».

Risoluzione

a. Il punto medio di uno spigolo del tetraedro viene congiunto con i punti medi degli spigoli che hanno un vertice in comune con quello di partenza. Completiamo in questo modo la tabella.

Il punto medio...	lo congiungiamo con...
f	g, h, k, l
g	f, h, l, m
h	f, g, k, m
k	f, h, l, m
l	f, g, k, m
m	g, h, k, l

b. L'ottaedro ha 12 spigoli, considerando che nella tabella precedente ciascuna congiungente appare due volte: per esempio, il segmento fg appare nella prima e nella seconda riga, il segmento fh appare nella prima e nella terza ecc.

c. Le facce dell'ottaedro sono otto: fhg, fgl, flk, fkh, mgl, mlk, mkh, mhg.

d. Per l'ottaedro è: $V = 6$, $S = 12$, $F = 8$, quindi è verificata la relazione di Eulero:

$$F + V - S = 8 + 6 - 12 = 2.$$

e. I triangoli che costituiscono le facce dell'ottaedro sono equilateri e congruenti; i loro lati sono infatti ottenuti congiungendo i punti medi di triangoli equilateri congruenti (le facce del tetraedro), e pertanto sono tutti congruenti alla metà dello spigolo del tetraedro regolare.