RISOLVIAMO UN PROBLEMA CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

In questo svolgimento usiamo una calcolatrice grafica **Casio**. *Nell'eBook e nel sito del libro trovi anche la versione con una calcolatrice grafica* **Texas Instruments**.

Un triangolo nello spazio cartesiano

Considera nello spazio il triangolo di vertici $A(2; 2; 3)$, $B(1; -1; 1)$ e $O(0; 0; 0)$.

a. Dimostra che il triangolo OAB è rettangolo e individua il vertice dell'angolo retto.

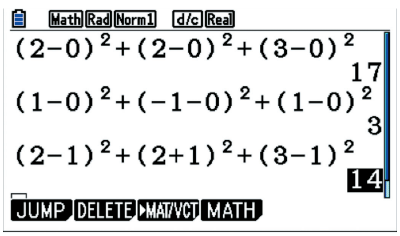
b. Determina l'equazione cartesiana del piano passante per i vertici del triangolo.

► Il triangolo è rettangolo.

Per mostrare che il triangolo è rettangolo dimostriamo che vale il teorema di Pitagora, cioè che il quadrato di uno dei tre lati è uguale alla somma dei quadrati degli altri due.
Calcoliamo dunque:

$$\overline{OA}^2 = (x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2 + (z_O - z_A)^2,$$

e, in maniera analoga, $\overline{OB}^2$ e $\overline{AB}^2$.
Utilizziamo la calcolatrice per fare i conti.



Troviamo:

$$\overline{OA}^2 = 17,\ \overline{OB}^2 = 3,\ \overline{AB}^2 = 14.$$

Osserviamo che

$$\overline{OB}^2 + \overline{AB}^2 = 3 + 14 = 17 = \overline{OA}^2.$$

Pertanto possiamo concludere che il triangolo OAB è rettangolo.
L'angolo retto ha vertice necessariamente in B.

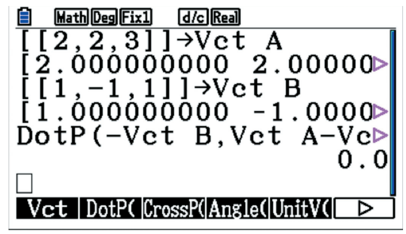
► Dimostrazione alternativa.

Indichiamo con $\vec{a}$ e $\vec{b}$ i vettori posizione corrispondenti ai punti A e B. In altre parole $\overrightarrow{OA} = \vec{a}(2; 2; 3)$ e $\overrightarrow{OB} = \vec{b}(1; -1; 1)$.
Dimostrare che il triangolo OAB è rettangolo in B equivale a dimostrare che i vettori $\overrightarrow{BO} = -\vec{b}$ e $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ sono ortogonali.
Possiamo pertanto dimostrare che il prodotto scalare tra i due vettori vale 0.
Torniamo all'ambiente di calcolo e inseriamo i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

In questo caso:

$$[[2, 2, 3]] \quad \rightarrow \quad Vct\,A.$$

In maniera analoga si definisce il vettore $\vec{b}$. Utilizziamo il comando *dotP* per calcolare il prodotto scalare dei vettori $-\vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ e otteniamo 0.



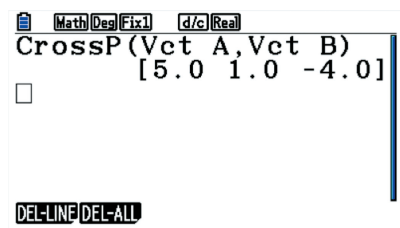
Questo risultato conferma che i due vettori sono ortogonali e che il triangolo è rettangolo con l'angolo B di 90°.

► Piano al quale appartiene il triangolo.

Osserviamo che se un piano contiene i vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ contiene anche il vettore $\overrightarrow{AB}$ e di conseguenza contiene il triangolo OAB.
Il prodotto vettoriale, *crossP*, tra $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$

$$(2; 2; 3) \cdot (1; -1; 1)$$

permette di trovare il vettore perpendicolare al piano contenente $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.



Quindi il vettore $(5; 1; -4)$ è ortogonale al piano che stiamo cercando e se indichiamo con $(x; y; z)$ un generico vettore di tale piano, abbiamo:

$$(x; y; z) \cdot (5; 1; -4) = 0.$$

L'uguaglianza appena scritta esprime la condizione che un generico vettore $(x; y; z)$ e quindi un generico punto $(x; y; z)$ deve soddisfare per appartenere al piano cercato.
Facciamo i conti e troviamo l'equazione cartesiana del piano:

$$5x + y - 4z = 0.$$