RISOLVIAMO UN PROBLEMA CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

In questo svolgimento usiamo una calcolatrice grafica **Texas Instruments**. *Nell'eBook e nel sito del libro trovi anche la versione con una calcolatrice grafica* **Casio**.

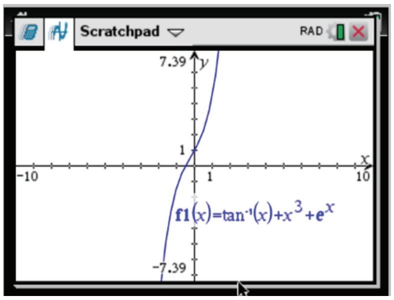
Un'equazione trascendente

Dimostrare che l'equazione $\arctan(x) + x^3 + e^x = 0$ ha una e una sola soluzione reale.

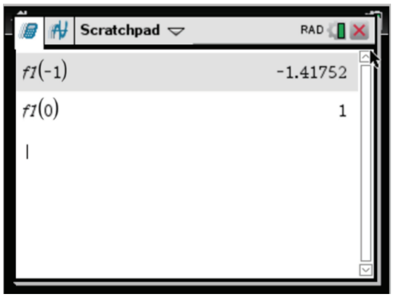
(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria, 2017, quesito 9*)

► Esistenza della soluzione.

Inseriamo nell'ambiente grafico della calcolatrice la funzione $f(x) = \arctan(x) + x^3 + e^x$ e premiamo il tasto di Invio.



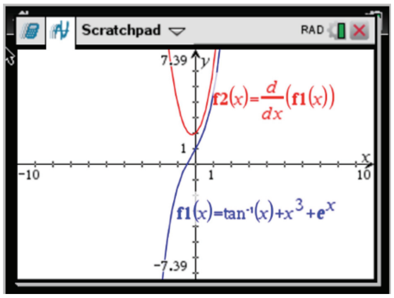
Osserviamo che il grafico della funzione interseca l'asse delle ascisse in un punto dell'intervallo $[-1; 0]$.
Se passiamo all'ambiente di calcolo possiamo determinare il valore della nostra funzione agli estremi dell'intervallo considerato.



La funzione ha segno opposto agli estremi e quindi, per il teorema degli zeri, esiste almeno un numero reale c, appartenente all'intervallo $[-1; 0]$, tale che $f(c) = 0$.
In altre parole la nostra equazione iniziale ha almeno una soluzione.

► Unicità della soluzione.

Come prima parziale conferma dell'unicità di tale soluzione inseriamo nello stesso ambiente grafico anche la derivata prima della funzione iniziale.



Osserviamo che la derivata prima è sempre positiva e di conseguenza la funzione in esame è sempre crescente sull'intervallo visualizzato. Per dimostrare che questo è vero su tutto l'asse reale non basta il grafico. Dobbiamo calcolare la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 3x^2 + e^x.$$

$f'(x)$ è sempre positiva in quanto somma di due termini positivi $\frac{1}{1+x^2}$ e e^x e uno non negativo $3x^2$.

Dalla positività della derivata prima possiamo concludere che la funzione $f(x)$ è crescente su tutto l'asse reale. Sapendo che l'equazione $\arctan(x) + x^3 + e^x = 0$ almeno una radice reale, possiamo ora concludere che la radice è una sola.

► Un passo in più.

Se vogliamo avere un valore approssimato della radice, col grado di approssimazione determinato dalle impostazioni scelte per la nostra calcolatrice, possiamo utilizzare il comando *nSolve* nell'ambiente di calcolo.