RISOLVIAMO UN PROBLEMA CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

In questo svolgimento usiamo una calcolatrice grafica **Casio**. *Nell'eBook e nel sito del libro trovi anche la versione con una calcolatrice grafica* **Texas Instruments**.

Due rette e una curva

Stabilire se le rette:

r: $y = 5x - 6$ $\qquad$ s: $y = 21x + 25$

sono tangenti alla curva δ di equazione:

$y = x^3 - 2x^2 + x + 1$

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Sessione suppletiva, 2017, quesito 8*)

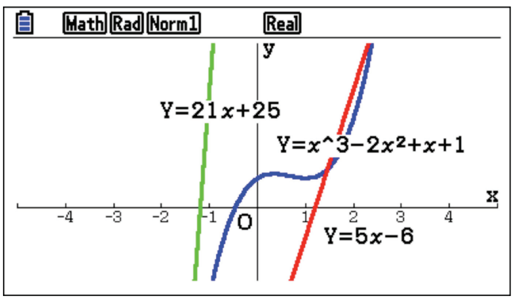
► Osservazioni iniziali.

Inseriamo nello stesso ambiente grafico la funzione

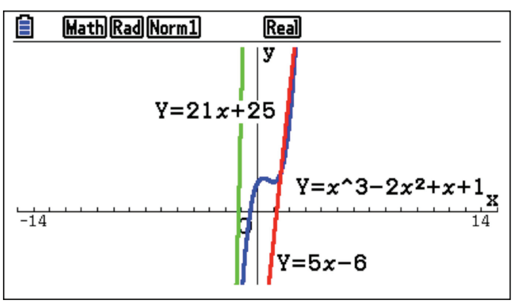
$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$,

e le due rette:

r: $y = 5x - 6$; $\qquad$ s: $y = 21x + 25$.



Modifichiamo le impostazioni per aumentare la porzione di piano cartesiano visualizzata.



Osserviamo che $f(x)$ è una funzione polinomiale di terzo grado. Di conseguenza, una retta può intersecare il suo grafico al massimo in tre punti; inoltre, se la retta è tangente, almeno due punti di intersezione devono essere coincidenti.

Notiamo che la retta $y = 5x - 6$ interseca il grafico della curva δ in tre punti, dunque r non è tangente. Vediamo che invece la retta $y = 21x + 25$ interseca il grafico della curva in un solo punto dunque s potrebbe essere tangente.

Verifichiamo la correttezza delle nostre affermazioni basate finora solo sulla porzione di grafico visualizzata.

► La retta *r* non è tangente.

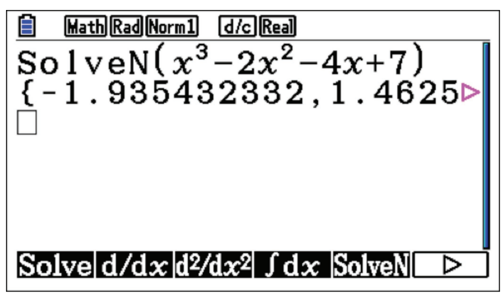
Per mostrare che la retta r non è tangente a δ risolviamo l'equazione:

$x^3 - 2x^2 + x + 1 = 5x - 6$.

Equivalentemente:

$x^3 - 2x^2 - 4x + 7 = 0$.

Utilizziamo ora, nell'ambiente di calcolo, il comando *SolveN* che permette di determinare le radici di un polinomio.



Otteniamo tre radici, dunque la retta $5x - 6$ interseca il grafico di δ in tre punti distinti e, pertanto, r non è tangente.

► La retta *s* è tangente.

Le rette tangenti a $f(x)$ sono del tipo:

$y = f'(x)x + q, \qquad q \in \mathbb{R}$.

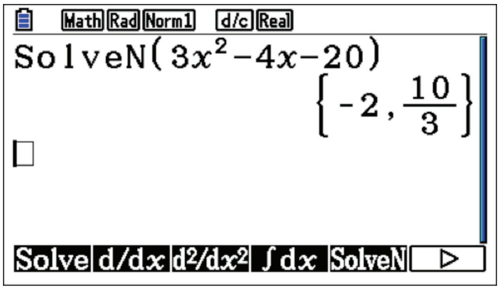
Vogliamo provare che la retta s, che ha coefficiente angolare uguale a 21, è tangente a $f(x)$. Quindi poniamo:

$f'(x) = 21 \rightarrow$

$3x^2 - 4x + 1 = 21 \rightarrow$

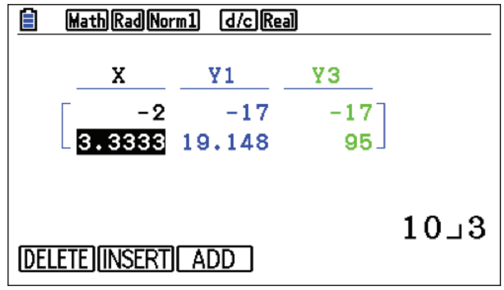
$3x^2 - 4x - 20 = 0$.

Utilizziamo lo stesso comando di prima.



Nei punti di ascissa -2 e $\frac{10}{3}$ la retta tangente alla curva ha la stessa pendenza della retta $y = 21x + 25$. Dobbiamo ora verificare che per questi valori delle ascisse i punti corrispondenti sulla retta e sul grafico della funzione abbiano la stessa ordinata.

Utilizziamo di nuovo l'ambiente di calcolo per calcolare le ordinate di s e $f(x)$ nei punti di ascissa -2 e $\frac{10}{3}$.



Le ordinate coincidono solo per $x = -2$.
Quindi la retta s è tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(-2; -17)$.