RISOLVIAMO UN PROBLEMA CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

In questo svolgimento usiamo una calcolatrice grafica **Texas Instruments**. *Nell'eBook e nel sito del libro trovi anche la versione con una calcolatrice grafica* **Casio**.

Due rette e una curva

Stabilire se le rette:

r: $y = 5x - 6$ $\qquad$ s: $y = 21x + 25$

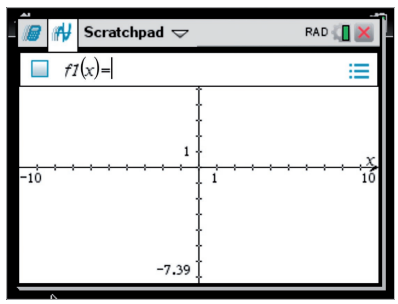
sono tangenti alla curva δ di equazione:

$y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

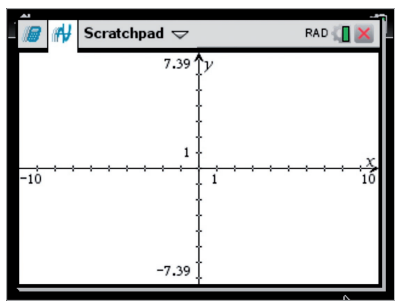
(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Sessione suppletiva, 2017, quesito 8*)

► Osservazioni iniziali.

Apriamo una pagina *Grafico*. Appare la seguente schermata.

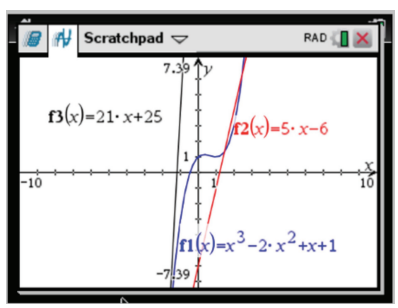


Per il momento non ci interessa la riga di introduzione, che possiamo togliere con la successione di comandi *Menu* → *Vista* → *Nascondi riga di introduzione*.

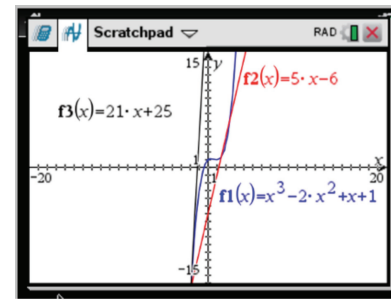


Inseriamo nell'ambiente grafico della calcolatrice la funzione $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ e le due rette:

r: $y = 5x - 6$; $\qquad$ s: $y = 21x + 25$.



Modifichiamo le impostazioni per estendere la porzione di piano cartesiano visualizzata.



Osserviamo che $f(x)$ è una funzione polinomiale di terzo grado. Di conseguenza, una retta può intersecare il suo grafico al massimo in tre punti; inoltre, se la retta è tangente, almeno due punti di intersezione devono essere coincidenti.

Notiamo che la retta r: $y = 5x - 6$ interseca il grafico della curva δ in tre punti distinti: dunque r non è tangente.
Vediamo che invece la retta s: $y = 21x + 25$ interseca il grafico della curva in un solo punto, qundi s potrebbe essere tangente a δ.

Verifichiamo algebricamente la correttezza delle nostre affermazioni, basate finora solo sull'osservazione della porzione di grafico visualizzata.

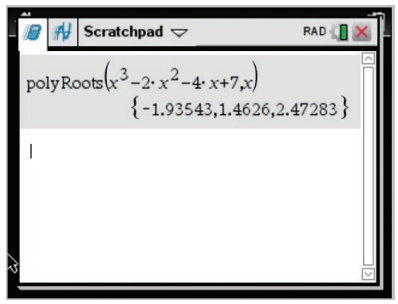
► La retta *r* non è tangente.

Per mostrare che la retta r non è tangente a δ risolviamo l'equazione:

$$x^3 - 2x^2 + x + 1 = 5x - 6 \rightarrow$$

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 7 = 0.$$

Apriamo l'ambiente di calcolo e utilizziamo il comando *polyRoots*, che permette di calcolare gli zeri di un polinomio.



Otteniamo tre radici, dunque la retta di equazione $5x-6$ interseca la curva δ in tre punti distinti. Pertanto, possiamo concludere che la retta r non è tangente alla curva δ.

► La retta s è tangente.

Le rette tangenti a $f(x)$ sono del tipo:

$$y = f'(x)x + q, \qquad q \in \mathbb{R}.$$

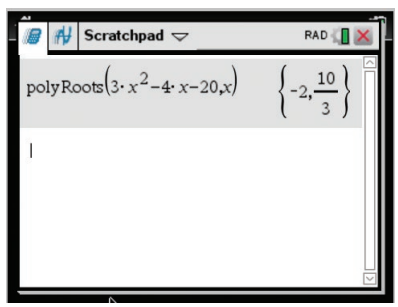
Vogliamo esaminare se la retta s, che ha coefficiente angolare uguale a 21, sia tangente a $f(x)$.
Poniamo:

$$f'(x) = 21 \rightarrow$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 21 \rightarrow$$

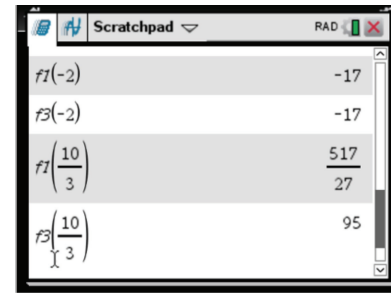
$$3x^2 - 4x - 20 = 0.$$

Utilizziamo nuovamente il comando *polyRoots* per calcolare gli zeri del polinomio $3x^2 - 4x - 20 = 0$.



Nei punti di ascissa -2 e $\frac{10}{3}$ la retta tangente alla curva ha la stessa pendenza della retta $y = 21x + 25$. Dobbiamo ora verificare che per questi valori delle ascisse i punti corrispondenti sulla retta e sul grafico della funzione abbiano la stessa ordinata.

Utilizziamo di nuovo l'ambiente di calcolo per calcolare le ordinate di s e $f(x)$ nei punti di ascissa -2 e $\frac{10}{3}$.



Le ordinate coincidono solo per $x = -2$.
Quindi la retta s è tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(-2; -17)$.