



Rate con l'algebra di Tartaglia

Il seguente problema è riportato nel *General Trattato*, sesta parte, carta 19, di Niccolò Fontana detto Tartaglia.

Vno presta a vna comunità 2000, a 20 per cento all'anno di utilità, a essere pagato in anni quattro, videlicet in capo di ciascuno di essi quattro anni,

[...]

Si dimanda quanto douerà hauere per ciascuno di essi anni. Douendo hauer tanto vn'anno quanto l'altro.

Tradotto in italiano corrente diventa:

«Uno presta a una comunità 2000 ducati, al 20 per cento all'anno di utilità, per essere pagato in quattro anni, cioè alla fine di ciascuno dei quattro anni.

Si domanda quanto dovrà avere per ciascun anno, dovendo avere tanto un anno quanto l'altro».

- Illustra come può essere ottenuta l'espressione $2400 - x$ che esprime il fatto che al primo anno quel tale vede maturare un interesse ma riscuote la prima rata.
- Secondo anno: scrivi l'espressione che considera la quota riportata al punto precedente, incrementata dell'interesse annuo maturato, e la riscossione della rata.
- Terzo anno: ancora, trova l'espressione che considera il capitale rivalutato meno la rata riscossa.
- Quarto anno: con la riscossione dell'ultima rata, dovrà risultare «soddisfatto sia del suo capitale, come del guadagno». Scrivi e risolvi l'equazione che consente di ricavare x .

RISOLUZIONE

Per la soluzione, Tartaglia propone di considerare che in ciascuno dei quattro anni quel tale

debba hauere x co.de

cioè debba avere un numero incognito di ducati, vale a dire la rata: indichiamola con x .

Tartaglia evidenzia poi che $20\% = \frac{1}{5}$.

- Alla fine del primo anno, viene maturato un interesse del 20% sui 2000 ducati, ma viene riscossa la prima rata, che abbiamo indicato con x :

$$2000 + 2000 \cdot \frac{1}{5} - x = 2400 - x.$$

- Alla fine del secondo anno, la quota $2400 - x$ viene incrementata del 20% e si riscuote una seconda rata x :

$$(2400 - x) + (2400 - x) \cdot \frac{1}{5} - x = 2880 - \frac{11}{5}x = 2880 - \left(2 + \frac{1}{5}\right)x,$$

dove abbiamo messo in evidenza il termine $\left(2 + \frac{1}{5}\right)$, come fatto da Tartaglia.

- Procediamo in modo analogo. Alla fine del terzo anno abbiamo:

$$\left(2880 - \frac{11}{5}x\right) + \left(2880 - \frac{11}{5}x\right) \cdot \frac{1}{5} - x = 3456 - \frac{91}{25}x = 3456 - \left(3 + \frac{16}{25}\right)x,$$

dove l'ultimo passaggio riporta sempre agli scritti di Tartaglia.

- Alla fine del quarto anno abbiamo:

$$\left(3456 - \frac{91}{25}x\right) + \left(3456 - \frac{91}{25}x\right) \cdot \frac{1}{5} - x = \frac{20736}{5} - \frac{671}{125}x = 4147 + \frac{1}{5} - \left(5 + \frac{46}{125}\right)x.$$

Tale quantità deve essere nulla, poiché con il quarto anno il debito è saldato:

$$\frac{20736}{5} - \frac{671}{125}x = 0 \rightarrow x = \frac{20736}{5} \cdot \frac{125}{671} = \frac{518400}{671} = 772 + \frac{388}{671} \simeq 772,58.$$

La rata annuale da riscuotere è dunque pari a circa 772,58 ducati.

Osserviamo che il risultato ottenuto è in accordo con quello che avremmo trovato applicando la formula moderna $R = 2000\sigma_{10,2}$.

■ ESERCIZIO IN PIÙ

Nella sesta parte, carta 20 del *General Trattato*, Tartaglia propone invece il seguente problema.

Vno compra vno credito de 800 per 600 equal 600 ditto comprador gli exborfa attualmente al uenditore subito concluso il mercato, Et poi esso compratore a da riscottare ditto credito in dui anni videlicet 400 in fine de cadauno de essi dui anni, si dimanda quanto esso compratore guadagna per cento all'anno.

Tradotto in italiano corrente diventa:

«Uno compra un credito di 800 ducati per 600 ducati, i quali 600 ducati detto compratore li paga attualmente al venditore subito concluso il mercato. Poi il compratore deve riscuotere questo credito in due anni, vale a dire 400 ducati alla fine di ognuno di questi due anni. Si domanda quanto il compratore guadagna in percentuale all'anno».

- Supponi che il compratore guadagni x ducati per cento l'anno. Quanto guadagna su 600 ducati? Quale montante ottiene in questo modo? Considera che dopo un anno riscuote la prima rata di 400 ducati: esprimi quanto gli rimane come capitale all'inizio del secondo anno.
- Considerando lo stesso tasso x , esprimi il montante al termine del secondo anno che, dice Tartaglia, è uguale ai 400 ducati.
- Risolvi l'equazione ottenuta al punto precedente e mostra che la radice positiva è uguale a:

$$R: 7777 \frac{1}{9} m\acute{e} 66 \frac{2}{3}$$

Risoluzione

Seguiamo la risoluzione algebrica proposta dallo stesso Tartaglia, anche se useremo il simbolismo moderno.

- Alla fine del primo anno, sui 600 ducati è maturato un interesse dell' $x\%$ e il compratore ha incassato i primi 400 ducati; calcoliamo il montante e sottraiamo la rata:

$$600 + 600 \cdot \frac{x}{100} - 400 = 200 + 6x.$$

- Alla fine del secondo anno, il montante è quindi uguale a:

$$(200 + 6x) + (200 + 6x) \cdot \frac{x}{100} = \frac{3}{50}x^2 + 8x + 200.$$

- Questo montante è uguale a 400 ducati, quindi:

$$\frac{3}{50}x^2 + 8x + 200 = 400 \rightarrow \frac{3}{50}x^2 + 8x - 200 = 0 \rightarrow 3x^2 + 400x - 10000 = 0.$$

- Risolvi l'equazione ottenuta:

$$3x^2 + 400x - 10000 = 0 \rightarrow x = \frac{-200 \pm \sqrt{40000 + 30000}}{3} = \frac{-200 \pm \sqrt{70000}}{3} = \frac{-200 \pm 100\sqrt{7}}{3}.$$

La soluzione positiva è:

$$x = \frac{-200 + 100\sqrt{7}}{3} \simeq 21,52.$$

Il tasso applicato è quindi (circa) del 21,52%.

Mostriamo che la soluzione coincide con quella proposta da Tartaglia:

$$\begin{aligned} \frac{-200 + 100\sqrt{7}}{3} &= \frac{100}{3}\sqrt{7} - \frac{200}{3} = \sqrt{\frac{70000}{9}} - \left(\frac{66 \cdot 3 + 2}{3}\right) = \sqrt{\frac{7777 \cdot 9 + 7}{9}} - \left(\frac{66 \cdot 3 + 2}{3}\right) = \\ &= \sqrt{7777 + \frac{7}{9}} - \left(66 + \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$