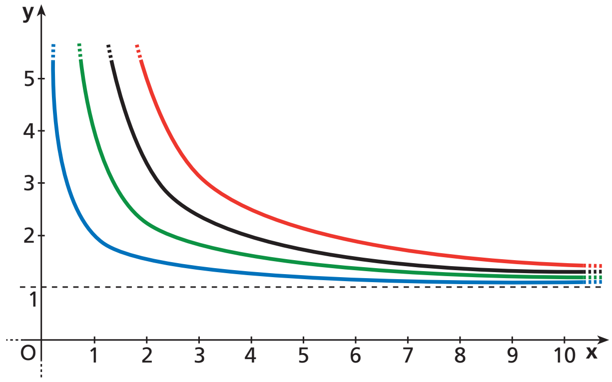
## MATEMATICA E STORIA
# Un limite notevole

Per mostrare che «$\frac{(x+1)^m}{x^m}$ ha l'unità come suo limite quando $x$ viene aumentato senza limite», il matematico inglese Augustus De Morgan (1806-1871), nella sua opera introduttiva al calcolo differenziale e integrale, utilizza l'uguaglianza:

$$\frac{(x+1)^m}{x^m} = 1 + \frac{mx^{m-1} + \text{etc.}}{x^m}$$




**a.** Verifica che l'uguaglianza è sempre vera comunque si scelga $m$ naturale positivo.

**b.** Giustifica la seguente affermazione di De Morgan: «Il numeratore di quest'ultima frazione diminuisce indefinitamente se comparato con il suo denominatore» (mostrando, con ciò, che il valore del limite citato all'inizio di questo esercizio è proprio 1).

## RISOLUZIONE

**a.** Sviluppiamo la potenza $m$-esima del binomio $(x+1)$:

$$\frac{(x+1)^m}{x^m} = \frac{\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}\cdot 1^k}{x^m} = \frac{x^m + mx^{m-1} + r(x)}{x^m},$$

dove abbiamo indicato con $r(x)$ il polinomio di grado $m-2$ risultante dallo sviluppo.
Dividendo il numeratore per il denominatore, troviamo:

$$\frac{x^m}{x^m} + \frac{mx^{m-1} + r(x)}{x^m} = 1 + \frac{mx^{m-1} + r(x)}{x^m},$$

che è l'espressione usata da De Morgan, a meno di indicare con $r(x)$ anziché con «etc.» i termini di grado al più $m-2$.

**b.** «Quest'ultima frazione» si riferisce al termine $\frac{mx^{m-1} + r(x)}{x^m}$.

Il numeratore e il denominatore tendono entrambi a $+\infty$ per $x \to +\infty$ (per $m \geq 2$), ma il numeratore è un polinomio di grado minore del denominatore, quindi il loro rapporto tende a 0:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{mx^{m-1} + r(x)}{x^m} = 0.$$

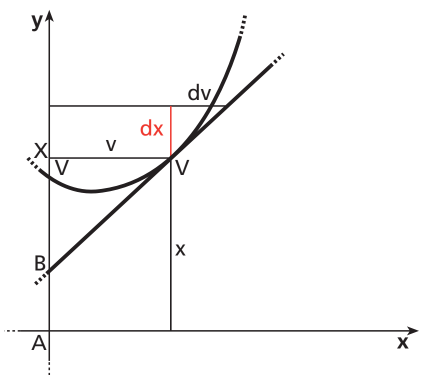
Nel caso $m = 1$, la frazione si riduce a $\frac{1}{x}$, che tende sempre a 0.
Il limite iniziale vale dunque:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^m}{x^m} = \lim_{x\to+\infty}\left[1 + \frac{mx^{m-1} + r(x)}{x^m}\right] = 1.$$

## ESERCIZIO IN PIÙ

**«Differentiae» o incrementi infinitesimi**

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), nel suo *Nova methodus pro maximis et minimis* del 1684, scrive:
«Ora un segmento preso ad arbitrio sia detto $dx$ e un segmento che sta a $dx$ come $v$ (o $w$, o $y$, o $z$) sta a $BX$ (o $CX$, o $DX$, o $EX$) sia detto $dv$ (o $dw$, o $dy$, o $dz$), ossia differenza delle stesse $v$ (o delle stesse $w$, o $y$, o $z$)».




**a.** Traduci in proporzione le prime righe della citazione.

**b.** Analizza la figura e illustra come questa proporzione si giustifica geometricamente.