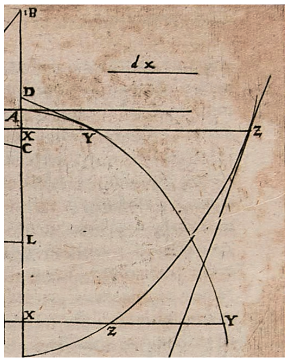
MATEMATICA E STORIA

Differenziali secondo Leibniz



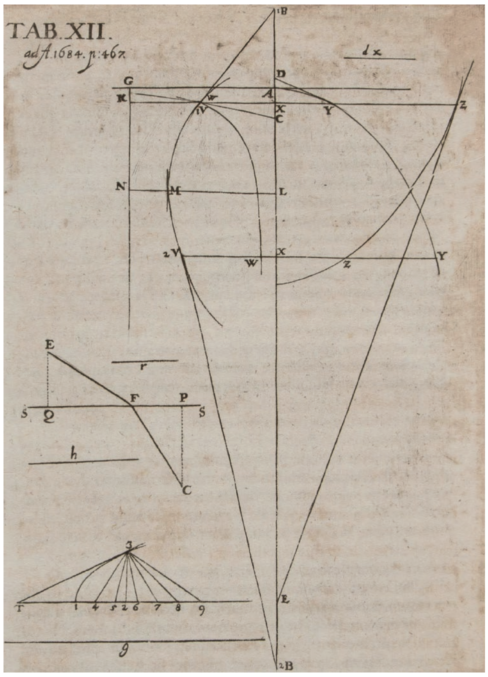
A Leibniz, assieme a Newton, si devono l'introduzione e i primi studi del calcolo infinitesimale. Fra l'altro, Leibniz coniò il termine «funzione» per indicare le caratteristiche di alcune curve, come l'andamento, la pendenza e la perpendicolare in un punto.
Nel suo *Nova methodus pro maximis et minimis*, del 1684, Leibniz scrive:
«Sia a una quantità data costante, sarà: $da = 0$ e $dax = adx$.
Addizione e sottrazione: se si ha $z - y + w + x = v$
sarà $d(z - y + w + x) = dv = dz - dy + dw + dx$.
Moltiplicazione: $dxv = xdv + vdx$».

a. Ricava la regola $dax = adx$ utilizzando le altre regole.

b. Applica la regola della moltiplicazione nel caso di x^2.

c. Leibniz si riferisce ai segmenti come dx, che compare in figura, come a «segmenti presi ad arbitrio». Spiega il significato geometrico della scrittura simbolica $\frac{dy}{dx}$ utilizzata per indicare la derivata di una funzione $y = f(x)$.

RISOLUZIONE



a. Utilizziamo la regola della moltiplicazione e quella del differenziale di una quantità costante:

$$dax \underset{\text{moltiplicazione}}{=} adx + xda \underset{da\,=\,0}{=} adx.$$

b. Il differenziale di x^2 vale:

$$dx^2 = dxx \underset{\text{moltiplicazione}}{=} xdx + xdx = 2xdx.$$

c. La scrittura $\frac{dy}{dx}$ indica il rapporto di due «segmenti presi ad arbitrio». Leibniz non fa riferimento esplicito a quantità infinitesime, tuttavia il segmento indicato con dx che compare in alto nella figura richiama proprio l'idea moderna di infinitesimo. In sintesi, possiamo dire che la scrittura $\frac{dy}{dx}$ indica «un passaggio al limite», come in effetti avviene nella definizione di derivata.

ESERCIZIO IN PIÙ

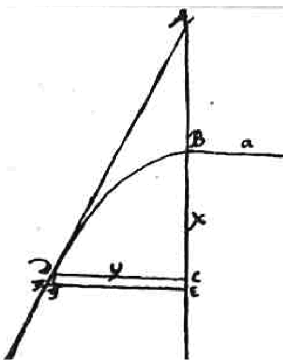
Tangente e sottotangente
Il matematico svizzero Johann Bernoulli (1667-1748), nel *De calculo differentialium*, chiede di:

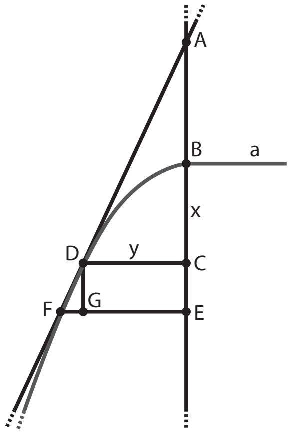
«Determinare la tangente a una parabola in un punto D, attraverso la *sottotangente*».

Consideriamo dunque la parabola di equazione $ax = y^2$ (vedi la figura originale qui sotto a sinistra, ridisegnata a destra per rendere più chiare alcune parti).

a. Applica al primo e al secondo membro dell'uguaglianza le regole di Leibniz viste nella scheda sul libro.

b. Sia $\overline{AC}$ la sottotangente s e consideriamo le lunghezze dei segmenti «infinitamente piccoli» $\overline{DG}$ e $\overline{FG}$, vale a dire dx e dy. I triangoli ADC e DFG risultano simili. Utilizza questo fatto e quanto ottenuto al punto precedente per esprimere la sottotangente s.





Risoluzione

a. $ax = y^2 \quad \rightarrow \quad dax = dy^2 \quad \rightarrow \quad adx = 2ydy.$

b. Dall'uguaglianza precedente ricaviamo $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a}{2y}$; per la similitudine dei triangoli possiamo impostare e risolvere la seguente proporzione:

$$\overline{DC} : \overline{CA} = \overline{FG} : \overline{GD} \quad \rightarrow \quad y : s = dy : dx \quad \rightarrow \quad \frac{y}{s} = \frac{dy}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{y}{s} = \frac{a}{2y} \quad \rightarrow \quad s = \frac{2y^2}{a}.$$