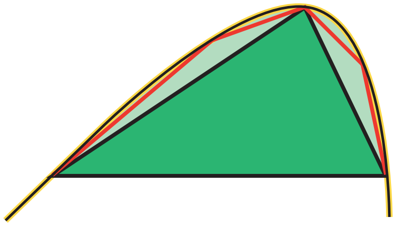
MATEMATICA E STORIA

Integrali ante litteram



Nel III secolo a.C., Archimede determinò con buona approssimazione le misure della lunghezza della circonferenza, dell'area del cerchio, del segmento parabolico, quelle di numerose altre superfici e di molti volumi di rotazione.

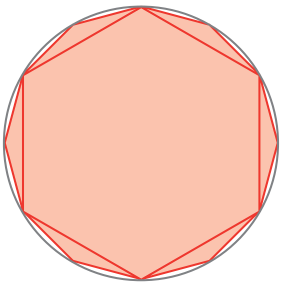
Quale metodo usò?

LA RISPOSTA

Archimede di Siracusa, vissuto tra il 287 e il 212 a.C. circa, è stato una figura di riferimento per gli analisti del Seicento. Sfruttando il *metodo di esaustione*, già elaborato da Eudosso di Cnido (408-355 a.C. circa), egli determinò con buona approssimazione la misura della lunghezza della circonferenza, dell'area del cerchio, del segmento parabolico e di numerose altre superfici e volumi di rotazione.

Possiamo pensare il metodo di esaustione come una prima versione di calcolo integrale, perché si basava sull'idea di approssimare una superficie curva attraverso una sequenza di poligoni inscritti e circoscritti dal numero di lati via via crescente. Ai matematici greci però mancava il concetto di limite. Il metodo di esaustione non comprendeva alcun passaggio al limite e si arrivava a dimostrare la tesi, che doveva già essere nota a priori per altre vie, attraverso un ragionamento per assurdo.

L'area del cerchio...

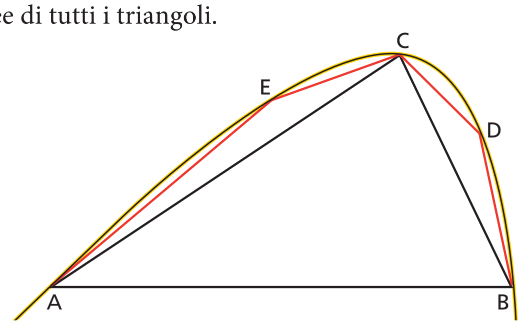


Per determinare l'area del cerchio, Archimede considerò una successione di poligoni inscritti e una successione di poligoni circoscritti, le cui aree rappresentavano rispettivamente una stima per difetto e una stima per eccesso dell'area del cerchio. Per esempio, all'aumentare del numero dei lati, l'area dei poligoni regolari inscritti approssima sempre meglio quella del cerchio. Ottenuta una buona stima dell'area del cerchio, sfruttò il principio di esaustione per la prova rigorosa.

In termini moderni noi diremmo che, comunque preso ε piccolo a piacere, esiste sempre un poligono inscritto tale che la differenza tra l'area A del cerchio e l'area del poligono è inferiore a ε (cioè è possibile avvicinarsi all'area del cerchio tanto quanto si vuole). La tesi si prova poi per assurdo: se si suppone che il cerchio abbia un'area A' inferiore ad A, allora esiste un poligono inscritto la cui area è maggiore di A', ma, essendo un poligono inscritto, la sua area non può superare quella del cerchio. Un ragionamento analogo vale per i poligoni circoscritti.

...e quella del segmento parabolico

Nel trattato *La quadratura della parabola* Archimede prova che l'area del segmento parabolico (la parte di piano compresa tra il segmento AB e la parabola) è uguale ai $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo costruito sulla base AB e avente la stessa altezza del segmento parabolico. Egli costruisce sulle corde AC e BC due triangoli aventi per base la corda e per altezza quella del segmento parabolico staccato dalla stessa. Procede poi costruendo triangoli sempre più piccoli sulle corde individuate dai triangoli precedenti e sommando le aree di tutti i triangoli.



Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone