MATEMATICA E FISICA

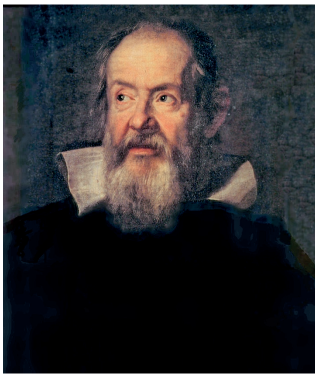
In caduta libera

Galileo affermò che in assenza di attrito tutti i corpi cadono con lo stesso moto.

Come si possono ricavare le leggi del moto di caduta di un grave utilizzando l'integrazione indefinita?

LA RISPOSTA

In *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638), Galileo afferma che se un mobile scende, a partire dalla quiete, con moto uniformemente accelerato, gli spazi percorsi da esso in tempi qualsiasi stanno tra loro in *duplicata proporzione dei tempi*, ossia, diremmo noi, sono proporzionali ai quadrati dei tempi.
La dimostrazione fornita da Galileo è piuttosto complessa. Oggi possiamo darne una agevolmente utilizzando derivate e integrali.



Galileo Galilei (1564-1642).

L'accelerazione
Per definizione, l'accelerazione in un istante t, cioè l'accelerazione istantanea, è:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t},$$

ossia la derivata della funzione velocità $v(t)$.

Il moto di un corpo in caduta libera
Quindi, indicata con g l'accelerazione costante di caduta di un grave, abbiamo

$$v'(t) = g,$$

da cui:

$$\int v'(t)\,dt = \int g dt \quad \to \quad v(t) = g \cdot t + c.$$

Il corpo parte dalla quiete, quindi la velocità iniziale $v(0)$ è nulla:

$$v(0) = g \cdot 0 + c = 0 \quad \to \quad c = 0.$$

La legge della velocità di un corpo in caduta libera è quindi:

$$v(t) = g \cdot t.$$

Poiché la velocità istantanea è definita come la derivata della posizione s nel tempo,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

abbiamo:

$$s'(t) = g \cdot t.$$

Integriamo ancora:

$$\int s'(t)\,dt = \int g \cdot t dt \quad \to \quad s(t) = \frac{1}{2} g t^2 + d.$$

Scegliamo un sistema di riferimento la cui origine è fissata nella posizione iniziale del corpo che viene lasciato cadere, $s(0) = 0$, quindi

$$0 = \frac{1}{2} g \cdot 0 + d \quad \to \quad d = 0,$$

da cui:

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2.$$

In conclusione…
Abbiamo allora dimostrato, come direbbe Galileo, «gli spazii passati essere in duplicata proporzione dei tempi, ossia come i quadrati di essi tempi».