MATEMATICA INTORNO A NOI

Sempre in giro

Ogni giorno i rappresentanti commerciali viaggiano di casa in casa e di città in città per presentare i loro prodotti.

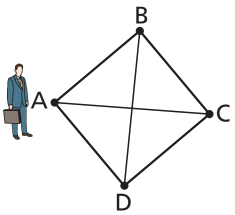
Come fanno a sapere qual è il percorso più breve per raggiungere i loro clienti?

LA RISPOSTA

La formulazione del problema, noto come «problema del commesso viaggiatore», è semplice.
Partendo da un punto, si tratta di visitare tutti i clienti compiendo il percorso più breve, per poi far rientro alla base. In termini più formali, il problema consiste nel costruire un grafo di n nodi in cui ogni nodo è collegato da un arco a ciascuno degli altri $n-1$ nodi e determinare il circuito che tocchi tutti i nodi una volta sola (ad eccezione del nodo di partenza) nel modo più efficiente, cioè minimizzando la distanza complessiva percorsa.

Un problema facile da descrivere ma complesso da risolvere

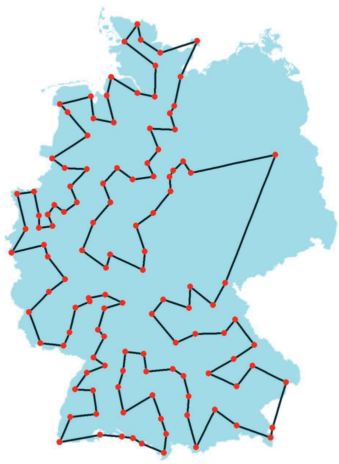
Il modo più semplice per risolvere il quesito è quello di enumerare tutti i possibili percorsi. Il numero delle possibili soluzioni cresce molto rapidamente con il numero dei nodi. Vediamo perché.
Supponiamo di avere un grafo di n nodi, con punto di partenza e arrivo A e $n-1$ tappe da raggiungere.



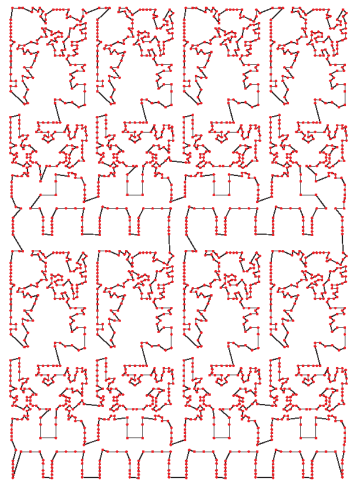
Ogni percorso che parte da A corrisponde a una permutazione delle rimanenti $n-1$ città. Infatti, è possibile scegliere in $(n-1)$ modi diversi la prima tappa e ognuna di queste scelte darà luogo a un sottoinsieme di soluzioni possibili. Stabilita la tappa numero uno, esistono $(n-2)$ modi di scegliere la seconda tappa, e quindi $(n-1) \cdot (n-2)$ gruppi distinti di soluzioni. Considerando tutte le tappe, avremo $(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ diversi percorsi.
Il prodotto di tutti i numeri compresi fra 1 e $n-1$ è $(n-1)!$ e cresce molto rapidamente al crescere di n, tanto che, per valori abbastanza grandi di n, nemmeno un computer è in grado di fornire una risposta in breve tempo. Inoltre, ciascuno di questi percorsi ha una lunghezza diversa. Se, per esempio, i tratti AB, BC, CD e AD hanno lunghezza 1 e i tratti AC e BD hanno lunghezza $\sqrt{2}$, allora il percorso $ABCDA$ ha lunghezza 4, mentre il percorso $ACBDA$ ha lunghezza $2 + 2\sqrt{2} > 4$.

Pizze a domicilio e linee telefoniche

La risoluzione del problema è utile a chi gestisce problemi di logistica e trasporti, ma anche a chi consegna pizze a domicilio, progetta linee telefoniche o circuiti integrati.
Sin dalla sua prima formulazione, fatta dal matematico irlandese William Hamilton alla fine dell'Ottocento, il problema del commesso viaggiatore (detto anche *circuito hamiltoniano*) ha sfidato le menti dei matematici più brillanti, che si sono messi alla ricerca di un algoritmo efficiente. In effetti, quello del commesso viaggiatore appartiene a una classe di problemi per i quali è difficile trovare un buon algoritmo.
Sono stati proposti diversi metodi di calcolo per risolvere circuiti hamiltoniani di dimensioni sempre maggiori. Nel 1954, fu stabilito il percorso ottimale per collegare tutte le capitali degli Stati Uniti. Nel 1977, fu determinato il ciclo più breve per collegare le principali 120 città della allora Germania occidentale. Nel 2001, fu trovata la soluzione esatta a un problema di 15 112 nodi, corrispondenti ai principali centri abitati tedeschi. Nel 2005, il limite fu ulteriormente superato e toccò quota 33 810 punti, relativi a una scheda di un circuito elettronico.



Martin Grötschel, nel 1977, trovò il percorso ottimale per 120 città della ex Germania occidentale.



Manfred W. Padberg e Giovanni Rinaldi, nel 1987, trovarono il percorso più efficiente relativo a uno schema di 2392 città.