

MATEMATICA AL COMPUTER

Il calcolo combinatorio

Una scatola contiene g gettoni gialli (numerati da 1 a g) e b gettoni blu (numerati da 1 a b). Consideriamo l'estrazione di un gruppo di e gettoni.

Costruiamo un foglio elettronico che, ricevuti i numeri g , b ed e , determini quanti gruppi differenti possiamo estrarre. Deve poi essere calcolato il numero di gruppi in relazione al numero k dei gettoni gialli in essi contenuti.

Per dimensionare il foglio poniamo come limite $g \leq 10$.

Proviamo il foglio nei casi $g = 2, b = 3$ ed $e = 2$; $g = 5, b = 3$ ed $e = 6$; $g = 10, b = 12$ ed $e = 10$.

Per verifica, scriviamo i gruppi del primo caso.

RISOLUZIONE

Analisi del problema

Chiamiamo t il numero totale dei gettoni ($t = g + b$). Per stabilire il numero delle diverse uscite possibili, calcoliamo le combinazioni semplici di t oggetti a gruppi di e .

Dobbiamo controllare che sia $g \leq 10$ ed $e \leq g + b$.

Otteniamo poi i valori accettabili di k , facendolo variare dal valore più grande fra 0 ed $e - b$ al valore più piccolo fra e e g . Per esempio, se nella scatola i gettoni gialli sono 2, quelli blu 3 e quelli estratti 2, k varia da 0 (nessun gettone estratto è giallo) a 2 (entrambi i gettoni gialli sono estratti). Se invece i gettoni gialli sono 5, quelli blu 3 e quelli estratti 6, k varia da 3 (differenza fra e e b) a 5 (perché $g < e$).

Per stabilire il numero dei gruppi distinti contenenti k gettoni, moltiplichiamo il numero delle combinazioni semplici di g oggetti a gruppi di k per il numero delle combinazioni semplici di b oggetti a gruppi di $e - k$.

Costruzione del foglio

Basandoci sull'analisi svolta costruiamo il foglio per risolvere il problema.

- Scriviamo delle didascalie e mettiamo dei bordi alle celle A5, B5, D7, per indicare dove inserire il numero dei gettoni gialli, quello dei gettoni blu e quello dei gettoni estratti (figura 1).
- Calcoliamo il totale t dei gettoni contenuti nella scatola, scrivendo la formula $=A5 + B5$ in D5.
- Per controllare g , digitiamo $=SE(A5 > 10; "Il foglio accetta 10 come numero massimo per i gettoni di colore giallo."; "=")$ in A6.
- Per controllare e , scriviamo $=SE(D7 > D5; "Il numero dei gettoni da estrarre supera il numero dei gettoni contenuti nella scatola"; "=")$ in A9.
- Determiniamo le diverse e possibili estrazioni, digitando $=SE(D7 > D5; 0; COMBINAZIONE(D5; D7))$ in D8.
- Per avere un appoggio al controllo dei valori di k , inseriamo nella colonna A un contatore: digitiamo 0 in A12, 1 in A13 e copiamo la zona A12:A13 sino alla A22.

1	A	B	C	D	E
2	Il calcolo combinatorio				
3	I gettoni numerati contenuti nella scatola sono				
4	gialli	blu	in totale		
5	2	3	5		
6	=				
7	Se un'estrazione è formata da 2 gettoni,				
8	le estrazioni distinte risultano 10.				
9	=				
10	I gruppi distinti				
11	Il contatore	contenenti		sono	
12	0	0	gialli	3	
13	1	1	giallo	6	
14	2	2	gialli	1	
15	3	/	/	0	
16	4	/	/	0	
17	5	/	/	0	
18	6	/	/	0	
19	7	/	/	0	
20	8	/	/	0	
21	9	/	/	0	
22	10	/	/	0	
23					
24	Il numero delle combinazioni 10				

a. Il foglio corrispondente ai dati $g = 2, b = 3$ ed $e = 2$.

1	A	B	C	D	E
2	Il calcolo combinatorio				
3	I gettoni numerati contenuti nella scatola sono				
4	gialli	blu	in totale		
5	5	3	8		
6	=				
7	Se un'estrazione è formata da 6 gettoni,				
8	le estrazioni distinte risultano 28.				
9	=				
10	I gruppi distinti				
11	Il contatore	contenenti		sono	
12	0	/	/	0	
13	1	/	/	0	
14	2	/	/	0	
15	3	3	gialli	10	
16	4	4	gialli	15	
17	5	5	gialli	3	
18	6	/	/	0	
19	7	/	/	0	
20	8	/	/	0	
21	9	/	/	0	
22	10	/	/	0	
23					
24	Il numero delle combinazioni 28				

b. Il foglio corrispondente ai dati $g = 5, b = 3$ ed $e = 6$.

1	A	B	C	D	E
2	Il calcolo combinatorio				
3	I gettoni numerati contenuti nella scatola sono				
4	gialli	blu	in totale		
5	10	12	22		
6	=				
7	Se un'estrazione è formata da 10 gettoni,				
8	le estrazioni distinte risultano 646646.				
9	=				
10	I gruppi distinti				
11	Il contatore	contenenti		sono	
12	0	0	gialli	66	
13	1	1	giallo	2200	
14	2	2	gialli	22275	
15	3	3	gialli	95040	
16	4	4	gialli	194040	
17	5	5	gialli	199584	
18	6	6	gialli	103950	
19	7	7	gialli	26400	
20	8	8	gialli	2970	
21	9	9	gialli	120	
22	10	10	gialli	1	
23					
24	Il numero delle combinazioni 646646				

c. Il foglio corrispondente ai dati $g = 10, b = 12$ ed $e = 10$.

Figura 1

- Mostriamo i valori accettabili di k , scrivendo la formula =SE(O(A12 1 \$D\$7 - \$B\$5; A12 2 MIN(\$A\$5; \$D\$7)); "/" ; A12) in C12 e copiandola sino alla C22.
- Per scrivere l'etichetta "gialli" solo dove serve, digitiamo =SE(C12 = "/" ; "/" ; SE(C12 = 1 ; "giallo" ; "gialli")) in D12 e la copiamo sino alla D22.
- Calcoliamo il numero delle estrazioni che contengono k gettoni gialli, scrivendo =SE(C12 = "/" ; 0 ; COMBINAZIONE(\$A\$5 ; A12)*COMBINAZIONE(\$B\$5 ; \$D\$7 - A12)) in E12 e copiandola sino alla E22.
- Digitiamo =SOMMA(E12:E22) in E24, in modo da verificare che la somma del numero dei gruppi che abbiamo ottenuto sia uguale al numero delle distinte estrazioni.

I dati

Immettiamo i valori 2, 3 e 2 rispettivamente nelle celle A5, B5 e D7 e vediamo il foglio della figura **1a**. Analogamente, otteniamo il foglio della figura **1b** con 5, 3 e 6 e quello della figura **1c** con 10, 12 e 10.

Le combinazioni del primo caso

Per verifica, scriviamo le combinazioni semplici dei 5 oggetti $\{g_1, g_2, b_1, b_2, b_3\}$ in gruppi di 2:

con 0 gialli:	$[b_1, b_2], [b_1, b_3], [b_2, b_3]$	3
con 1 giallo:	$[g_1, b_1], [g_1, b_2], [g_1, b_3], [g_2, b_1], [g_2, b_2], [g_2, b_3]$	6
con 2 gialli:	$[g_1, g_2]$	1

ESERCIZI IN PIÙ

Costruisci i fogli che, dopo aver letto i valori di n e di k , verifichino le seguenti identità.

1 $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)!$

2 $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

3 $\binom{n+1}{2} = n^2 - \binom{n}{2}$

Dopo aver analizzato ognuno dei seguenti problemi, costruisci un foglio che permetta l'ingresso dei dati, calcoli e mostri i risultati. Prova il foglio nei casi proposti. Sul quaderno scrivi i gruppi corrispondenti al caso a.

- 4** In una scuola ci sono tre classi quinte formate rispettivamente da a , b e c alunni. Occorre formare una rappresentanza formata da quattro alunni, di cui due della classe più numerosa. Determina quante sono le possibili quaterne che si possono formare. **a.** $a = 3, b = 2, c = 2$; **b.** $a = 28, b = 24, c = 30$; **c.** $a = 24, b = 24, c = 22$. [a] 12; b) 292 320; c) 145 728]
- 5** Hai n gettoni neri numerati da 1 a n , b gettoni bianchi numerati da 1 a b , r gettoni rossi numerati da 1 a r . Determina le possibili sestine che puoi formare con due gettoni neri, tre bianchi e uno rosso. **a.** $n = 2, b = 4, r = 2$; **b.** $n = 5, b = 3, r = 3$; **c.** $n = 6, b = 2, r = 4$. [a] 8; b) 30; c) 0]
- 6** Quanti numeri di c cifre tutte diverse puoi formare con gli elementi dell'insieme A formato da m cifre diverse e quanti di essi iniziano con la cifra r ? Quanti ne puoi formare di c cifre anche ripetute e quanti di essi iniziano con la cifra r ? **a.** $c = 2, A = \{1, 2, 3, 4\}, r = 4$; **b.** $c = 3, A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, r = 7$; **c.** $c = 4, A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}, r = 5$. [a] 12 e 3, 16 e 4; b) 60 e 12, 125 e 25; c) 840 e 0, 2401 e 0]
- 7** Con una parola formata da l lettere, di cui n non ripetute, u ripetute una volta, d ripetute due volte, t ripetute tre volte, determina quanti anagrammi della parola puoi formare, anche senza significato (u, d e t possono anche valere 0). **a.** API; **b.** ARPA; **c.** COCCO. [a] 6; b) 12; c) 10]
- 8** Calcola i coefficienti dello sviluppo di $(ax + by)^n$. Assegna poi a x e a y dei valori e calcola la potenza del binomio prima e dopo lo sviluppo. **a.** $a = 3, b = -2, n = 3, x = 2, y = 1$; **b.** $a = 1, b = -3, n = 4, x = 1, y = 1$; **c.** $a = 1, b = 1, n = 6, x = 2, y = 1$. [a] $27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3, 64$; b) $x^4 - 12x^3y + 54x^2y^2 - 108xy^3 + 81y^4, 16$; c) $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6, 729$]