MATEMATICA INTORNO A NOI

La selezione aziendale

Un'azienda ha selezionato quattro persone da assumere e ha stabilito punteggi vari a seconda delle mansioni alle quali potrebbero essere assegnate.
Come avverrà questa fase affinché l'efficienza globale risulti massima?

LA RISPOSTA

Il punto di partenza è la seguente tabella, chiamata *matrice dell'efficienza*, nella quale per ogni persona è riportato il punteggio relativo a una data mansione.
La matrice dell'efficienza è sempre una matrice quadrata, perché si basa sull'associazione di persone diverse a mansioni diverse. Ci devono quindi essere tante persone quante sono le mansioni.

Mansioni / Persone	M_1	M_2	M_3	M_4
P_1	5	13	12	10
P_2	8	12	10	14
P_3	11	8	16	9
P_4	9	10	15	8

Si tratta di un problema di Programmazione Lineare con 16 variabili, dove la funzione da massimizzare è:

$$z = 5x_1 + 13x_2 + 12x_3 + \ldots + 8x_{16}.$$

Le variabili possono assumere solo valore 1, in caso di assegnazione della mansione, oppure 0 in caso contrario. I vincoli sono quindi
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$; $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1$ ecc.
e anche $x_1 + x_5 + x_9 + x_{13} = 1$ ecc.
Per determinare la soluzione applichiamo il procedimento detto **metodo ungherese** che permette di trovare la soluzione operando sulla matrice dell'efficienza.
Un teorema fondamentale afferma che la soluzione ottima per una matrice dell'efficienza non cambia per tutte le matrici che derivano da questa addizionando o sottraendo uno stesso numero da tutti gli elementi di una riga o di una colonna. Quando un problema è di massimo occorre moltiplicare tutti i valori per −1. Se il problema fosse di minimo i valori non cambiano e il procedimento rimane immutato.

−5	−13	−12	−10
−8	−12	−10	−14
−11	−8	−16	−9
−9	−10	−15	−8

1. Sottraiamo da ogni riga il valore minimo della riga stessa e, se in ciascuna riga compare un solo zero, abbiamo trovato la soluzione ottima (gli elementi delle righe con valore minore sono −13, −14, −16, −15; attenzione al segno meno). Nel nostro caso nella prima colonna non vi è alcuno zero.

8	0	1	3
6	2	4	0
5	8	0	7
6	5	0	7

2. Nelle colonne prive di zeri (la prima), sottraiamo agli elementi il termine con valore minore (5). Se in ciascuna riga compare un solo zero, abbiamo la soluzione ottima cercata. Nel nostro caso questo non si verifica.

3	0	1	3
1	2	4	0
0	8	0	7
1	5	0	7

3. Con il minor numero possibile di linee copriamo le righe e le colonne che contengono gli zeri. Nel nostro caso la prima e la terza riga, la terza e la quarta colonna.

3	0	1	3
1	2	4	0
0	8	0	7
1	5	0	7

4. Tra i valori delle celle non coperte dalle linee cerchiamo il valore minore (1), lo sottraiamo dai termini non coperti e lo addizioniamo ai termini dove si incrociano le linee.

3	0	2	4
0	1	4	0
0	8	1	8
0	4	0	7

Per individuare la soluzione ottima occorre effettuare gli abbinamenti cominciando dalle righe che contengono un solo zero. Quindi P_1M_2, P_3M_1, P_2M_4, P_4M_3 e il valore della funzione obiettivo è dato dalla somma dei valori delle rispettive celle della matrice dell'efficienza: $z = 13 + 11 + 14 + 15 = 53$. Può esistere più di una soluzione ottima.
Altri problemi a cui si può applicare questo metodo sono l'assegnazione di macchine a laboratori o di lavori a imprese.