## MATEMATICA E STORIA

# Prove ripetute, fra Seicento e Settecento...

Nel trattato *De mensura sortis*, il matematico inglese di origine francese Abraham De Moivre (1667-1754) presenta alcuni problemi di prove ripetute.

**Problema I**
$A$ e $B$ giocano con un dado, sotto la condizione che $A$ vincerà se, in otto lanci del dado, il numero 1 apparirà due o più volte, mentre $B$ vincerà se apparirà una sola volta o nessuna.

Quale sarà il rapporto delle probabilità?

## RISOLUZIONE

De Moivre riporta la seguente soluzione:
Poiché vi è un unico caso favorevole alla comparsa di 1 e cinque contrari, risulta $a = 1$ e $b = 5$. E poiché vi sono otto lanci del dado, risulta $n = 8$ e risulterà che $(a + b)^n - b^n - nab^{n-1}$ sta a $b^n + nab^{n-1}$ come 663 991 sta a 1 015 625, cioè circa come 2 sta a 3.

Per chiarire la risoluzione, ricordiamo che

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7 b + \binom{8}{2} a^6 b^2 + \ldots + 8ab^7 + b^8.$$

$b^8$ è il numero dei casi in cui 1 non compare mai; $8ab^7$ è il numero dei casi in cui compare una volta; $b^8 + 8ab^7$ è il numero dei casi in cui 1 non compare mai oppure una sola volta. $(a + b)^8 - b^8 - 8ab^7$ è così il numero dei casi in cui la comparsa di 1 si verifica almeno due volte.

$$\frac{(a+b)^8 - b^8 - 8ab^7}{b^8 + 8ab^7} = \frac{6^8 - 5^8 - 8 \cdot 1 \cdot 5^7}{5^8 - 8 \cdot 1 \cdot 5^7} = \frac{663991}{1015625} \approx \frac{2}{3}$$

## ESERCIZIO IN PIÙ

Dal *De Ratiociniis in ludo aleæ* di Christiaan Huygens: «Determinare il numero di lanci che un giocatore può accettare di fare per ottenere 6 con un unico dado.

[…]

In 4 lanci ha la speranza di ottenere $\frac{671a}{1296}$ e le speranze dei due giocatori stanno fra loro come 671 a 625, cioè un po' di più di 1 a 1».

Ciò significa che diventa più probabile ottenere almeno una volta 6 rispetto all'evento contrario.

Nella stessa opera Huygens afferma anche che, se il numero dei casi con cui ottengo la somma $a$ è $p$ e il numero dei casi con i quali ottengo la somma $b$ è $q$, ammettendo che tutti i casi possano verificarsi con la stessa facilità, allora la mia speranza matematica è $\frac{pa + qb}{p + q}$.

**a.** Al primo lancio, quanti sono i casi favorevoli all'uscita del punteggio 6? Quanti quelli contrari?

**b.** Al secondo lancio, per quanto visto al punto precedente, quanti sono i casi favorevoli all'uscita del punteggio 6 e quanti quelli che consentono di vincere la somma $\frac{a}{6}$? Quale speranza matematica si ottiene?

**c.** Verifica che dopo quattro lanci il numero dei casi favorevoli all'uscita del punteggio 6 supera almeno una volta quello dei casi contrari.

## Risoluzione

Illustriamo la risoluzione proposta dallo stesso Huygens.

Colui che pensa di ottenere 6 con il lancio di un dado, e di conquistare la posta in palio $a$, ha una possibilità a favore e 5 contrarie. Secondo il concetto di speranza matematica, a lui spetterebbe $\frac{a}{6}$ e al suo avversario $\frac{5a}{6}$.

Se pensasse di ottenere 6 al secondo lancio, si troverebbe nella seguente situazione: al primo lancio ha avuto un caso a favore per ottenere la posta $a$ e, avvalendosi del secondo lancio, ha 5 casi che gli offrono la speranza $\frac{a}{6}$, quindi ha la speranza

$$\frac{a+\frac{5a}{6}}{6}=\frac{11a}{36},$$

cioè 11 casi a favore contro 25 per il suo avversario. Al terzo lancio, 11 casi gli avrebbero permesso di ottenere la posta $a$ e 25 casi di accedere alla possibilità di conseguire la posta $\frac{a}{6}$, quindi:

$$\frac{11a+\frac{25a}{6}}{36}=\frac{91a}{216},$$

vale a dire 91 casi a favore contro 125.

Al quarto lancio, 91 casi gli avrebbero permesso di ottenere la posta $a$ mentre 125 gli avrebbero dato la possibilità di acquisire $\frac{1}{6}$ della posta, quindi:

$$\frac{91a+\frac{125a}{6}}{216}=\frac{671a}{1296},$$

vale a dire 671 casi favorevoli contro 625 di ottenere almeno una volta 6.