LABORATORIO DI MATEMATICA
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

Le equazioni irrazionali

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Derive discutiamo il numero delle soluzioni reali che può avere la seguente equazione irrazionale

$$\sqrt{x+h} = 2x + 2$$

al variare del parametro reale *h*.

Le soluzioni dell'equazione in funzione di *h*

• Entriamo in ambiente Derive, diamo *Crea_Espressione* e digitiamo nella riga di editazione delle espressioni l'equazione SQRT(x + h) = 2 * x + 2. Con OK la inseriamo nell'etichetta #1 della zona algebrica (figura1).
• Derive non risolve l'equazione irrazionale non conoscendo i valori del parametro h. Battiamo, allora, il tasto F4 importando l'equazione dalla zona algebrica alla riga di editazione delle espressioni fra parentesi. A fianco scriviamo ^2, per elevare al quadrato entrambi i membri dell'equazione ed eliminare la radice.
• Con OK la inseriamo nella #2.
• Usiamo *Risolvi_Espressione*, nella cui finestra di dialogo confermiamo l'equazione e usciamo con *Semplifica*, ottenendo nella #3 l'impostazione e nella #4 le soluzioni dell'equazione in funzione di h. Adesso verifichiamo se quelle trovate sono soluzioni accettabili dell'equazione originale.

#1: $\sqrt{(x + h)} = 2 \cdot x + 2$

#2: $(\sqrt{(x + h)} = 2 \cdot x + 2)^2$

#3: $\text{SOLVE}((\sqrt{(x + h)} = 2 \cdot x + 2)^2, x)$

#4: $x = \dfrac{\sqrt{(16 \cdot h - 15)} - 7}{8} \vee x = -\dfrac{\sqrt{(16 \cdot h - 15)} + 7}{8}$

◀ Figura 1

Le condizioni di esistenza delle soluzioni

Imponiamo le condizioni affinché l'equazione sia soddisfatta. Nel nostro caso sono: la condizione di esistenza del radicale, ovvero poniamo il radicando maggiore o uguale a 0, e la condizione che il secondo membro dell'equazione sia maggiore o uguale a 0.
• Dopo averlo evidenziato con dei clic successivi sull'equazione contenuta nella #1, importiamo nella riga di editazione il radicando x + h, a fianco battiamo ≥ 0, imponendo la condizione di esistenza del radicale, e lo inseriamo nella #5 (figura 2).
• Con *Risolvi_Espressione* ricaviamo nella #6 l'impostazione e nella #7 la soluzione della disequazione.
• Analogamente, operiamo per stabilire quando il secondo membro dell'equazione è positivo, come vediamo nella #8, nella #9 e nella #10.

#5: $x + h \geq 0$

#6: $\text{SOLVE}(x + h \geq 0, x)$

#7: $x \geq -h$

#8: $2 \cdot x + 2 \geq 0$

#9: $\text{SOLVE}(2 \cdot x + 2 \geq 0, x)$

#10: $x \geq -1$

◀ Figura 2

Esercitazioni

Le equazioni irrazionali con parametro

Con l'aiuto del computer discuti il numero delle soluzioni reali che possono avere le seguenti equazioni irrazionali al variare del parametro reale *k*.

1 $\sqrt{x-1} = h - x$ $[h \geq 1$: una sol.; $h < 1$: nessuna sol.$]$

2 $\sqrt{hx - x^2} = x$ $[h < 0$: una sol.; $h = 0$: una sol. doppia; $h > 0$: due sol.$]$

3 $\sqrt{1 + x^2} = -\frac{4x + h}{5}$ $[h < -3$: due sol.; $h = -3$: una sol. doppia; $h > -3$: nessuna sol.$]$

4 $\sqrt{1 - 3x} = x - h$ $\left[h \leq \frac{1}{3}\right.$: una sol.; $h > \frac{1}{3}$: nessuna sol.$\left.\right]$

5 $\sqrt{hx + 4} = x - 1$ $[h \geq 4$: una sol.; $h < 4$: nessuna sol.$]$

Le disequazioni

Il simbolo di assegnazione

In ambiente Derive, con il simbolo di assegnazione : = (due punti uguale) possiamo dare un nome a un'espressione.

ESERCITAZIONE GUIDATA

Cerchiamo gli zeri del polinomio $3k^3 - 12k$.

• Con *Crea_Espressione* scriviamo p: = 2 * k^3 − 12 * k e battiamo INVIO. In tal modo diamo il nome *p* al polinomio $3k^3 - 12k$ (figura 1).
• Scriviamo la funzione SOLVE (p = 0, k) e con INVIO la immettiamo nella #2.
• Diamo *Semplifica_Base* trovando nella #3 gli zeri del polinomio.

```
#1:   p := 3·k^3 - 12·k
#2:   SOLVE(p = 0, k)
#3:   k = -2 ∨ k = 2 ∨ k = 0
```

▲ **Figura 1** Un esempio di assegnazione.

L'assegnazione di un nome a un'espressione rimane attiva all'interno del file nel quale l'abbiamo realizzata, anche se cancelliamo l'etichetta che la contiene. Se desideriamo togliere un'assegnazione, per esempio quella al nome *p*, scriviamo l'espressione p : = e la inseriamo nella zona algebrica. Il solo simbolo di uguale (=) non vincola in alcun modo le grandezze coinvolte.

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Derive discutiamo il tipo delle soluzioni della disequazione

$$(3h + 3)x^2 - 3hx - 8h - 3 \geq 0,$$

in relazione ai valori del parametro reale *h*. Per verifica sostituiamo poi a *h* un valore appartenente a ognuno degli intervalli risultati dalla discussione e risolviamo le corrispondenti disequazioni.

L'analisi del problema

Redigiamo uno schema che indichi le diverse tipologie delle soluzioni della disequazione $ax^2 + bx + c \geq 0$, in relazione ai valori che assumono il coefficiente a di x^2 e il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Se	la disequazione $ax^2 + hx + c \geq 0$ ammette soluzioni che sono
$a > 0$ e $\Delta > 0$,	esterne all'intervallo delle radici, estremi compresi;
$a > 0$ e $\Delta \leq 0$,	date da $\mathbb{R}$;
$a = 0$,	quelle di una disequazione di primo grado;
$a < 0$ e $\Delta > 0$,	interne all'intervallo delle radici, estremi compresi;
$a < 0$ e $\Delta = 0$,	date da un solo valore di x;
$a < 0$ e $\Delta < 0$,	date da $\varnothing$ (l'insieme vuoto).

I dati della disequazione

• Diamo *Crea_Espressione* per scrivere la disequazione e battiamo INVIO per immetterla nell'etichetta #1 della zona algebrica (figura 2).

• Per assegnare il nome a all'espressione $3h + 3$, che rappresenta il coefficiente di x^2, sulla riga di editazione scriviamo a : = e importiamo dalla zona algebrica alla riga di editazione l'espressione 3h + 3. Per farlo, di seguito facciamo clic sull'etichetta #1, sul primo membro della disequazione, sul suo primo termine, sul coefficiente di x^2, sulla riga di editazione e battiamo il tasto F3.

• Costruita l'assegnazione a : = 3h + 3, con INVIO la immettiamo nella #2.

• Assegniamo il nome DELTA all'espressione che rappresenta il discriminante della disequazione in funzione di h, scrivendo nella riga di editazione

DELTA : = (− 3h)^2 − 4(3h + 3)(− 8h − 3)

e battendo INVIO.

• Posizionando opportunamente il puntatore e dando *Inserisci_Testo*, scriviamo alcune didascalie.

La disequazione

#1: $(3\cdot h + 3)\cdot x^2 - 3\cdot h\cdot x - 8\cdot h - 3 \geq 0$

Il coefficiente a

#2: $a := 3\cdot h + 3$

Il discriminante

#3: $\text{DELTA} := (-3\cdot h)^2 - 4\cdot(3\cdot h + 3)\cdot(-8\cdot h - 3)$

▲ **Figura 2** La disequazione, il coefficiente di x^2 e il discriminante.

Le soluzioni dei vari casi

• Per impostare la soluzione del primo caso dello schema, scriviamo nella riga di editazione SOLVE([a > 0, DELTA > 0], h) e battiamo INVIO (figura 3).

• Diamo *Semplifica_Base*, Derive risolve il sistema di disequazioni e mostra la soluzione nella #5.

• Operiamo similmente per ricavare le soluzioni degli altri casi.

• Osserviamo, leggendo la #13 e la #15, che i casi, corrispondenti al coefficiente a negativo assieme al discriminante nullo o negativo, non si verificano per alcun valore di h.

La soluzione dei vari casi

#4: SOLVE([a > 0, DELTA > 0], h)

#5: $\left[-1 < h < -\frac{6}{7},\ h > -\frac{2}{5}\right]$

#6: SOLVE([a > 0, DELTA ≤ 0], h)

#7: $\left[-\frac{6}{7} \leq h \leq -\frac{2}{5}\right]$

#8: SOLVE(a = 0, h)

#9: h = −1

#10: SOLVE([a < 0, DELTA > 0], h)

#11: [h < −1]

#12: SOLVE([a < 0, DELTA = 0], h)

#13: []

#14: SOLVE([a < 0, DELTA < 0], h)

#15: []

▲ **Figura 3** Le soluzioni dei vari casi.

Alcune verifiche

• Per svolgere rapidamente alcune verifiche, usiamo la funzione di Derive VECTOR. In essa inseriamo l'impostazione della soluzione della disequazione, il parametro h e i valori che intendiamo che esso assuma. Scegliamo tali valori in modo che ognuno appartenga a un diverso intervallo fra quelli ottenuti nella discussione, prendiamo per esempio $-2, -1, -\frac{9}{10}, -\frac{1}{2}, 0$. Se i valori della variabile che desideriamo sostituire nell'espressione non variano con regolarità, dobbiamo scrivere la funzione con la sintassi VECTOR(*espr*, *var*, *v*), dove *v* è l'insieme dei valori, posti fra parentesi quadre, che la variabile *var* deve assumere all'interno dell'espressione *espr*.

• Diamo, quindi, *Crea_ Espressione*, digitiamo l'espressione

VECTOR([SOLVE(3*(h + 1)*x^2 − 3*h*x − 8*h − 3 ≥ 0, x)], h, [− 2, − 1, − 9/10, − 1/2, 0])

e battiamo INVIO inserendola nell'etichetta #16 (figura 4).

• Con *Semplifica_Base* la facciamo operare, ricavando nella #17 le corrispondenti soluzioni della disequazione.

Alcune verifiche

#16: $\text{VECTOR}\left(\left[\text{SOLVE}(3\cdot(h+1)\cdot x^2-3\cdot h\cdot x-8\cdot h-3\geq 0,x)\right],h,\left[-2,-1,-\frac{9}{10},-\frac{1}{2},0\right]\right)$

#17: $\begin{bmatrix} 1-\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}\leq x\leq\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}+1 \\ x\geq-\frac{5}{3} \\ x\leq-7 \vee x\geq-2 \\ \text{true} \\ x\leq-1 \vee x\geq 1 \end{bmatrix}$

◂ **Figura 4** Alcune verifiche.

Osservazione

Notiamo che per $h = -2$ le soluzioni sono interne all'intervallo delle radici, per $h = -1$ otteniamo le soluzioni della disequazione lineare, per $h = -\frac{9}{10}$ e per $h = 0$ le soluzioni sono esterne all'intervallo delle radici, per $h = -\frac{1}{2}$ la risposta *true* (vero) indica che la disequazione è sempre vera, cioè le soluzioni sono date da $\mathbb{R}$.

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer discuti il tipo delle soluzioni delle seguenti disequazioni, in relazione ai valori reali del parametro *h*, e svolgi delle verifiche.

1 $\frac{3(2x-h)}{h+1} < \frac{x}{h^2-1}$

2 $2(h^3-h)x^2 + 2(h-1)x + 3 < 0$

3 $\frac{h-1}{h+3}x^2 - 2x + 2 \geq 0$

4 $\frac{hx-h-1}{x^2-2x-3} > 0$

Le disequazioni lineari

Risolvi le seguenti disequazioni lineari con l'aiuto del computer, svolgendo i vari passi, e infine controlla il risultato (se usi Derive, puoi farlo con il comando *Risolvi_Espressione*).

5 $10x + 8 < 7x - 24$ $\left[x < -\frac{32}{3}\right]$

6 $25x - 32 \geq 40x - 62$ $[x \leq 2]$

7 $\frac{4}{5}x - \frac{2}{3} > \frac{2}{3}x - \frac{6}{25}$ $\left[x > \frac{16}{5}\right]$

8 $\frac{5}{4}x-2>2x-\frac{2}{5}$ $\left[x<-\frac{32}{15}\right]$

9 $\frac{7}{5}x+\frac{25}{9}<\frac{1}{2}x-\frac{7}{15}+\frac{19}{10}x$ $\left[x>\frac{146}{45}\right]$

10 $\frac{28}{27}x-\frac{7}{12}\leq\frac{5}{24}x-\frac{35}{72}$ $\left[x\leq\frac{21}{179}\right]$

11 $\frac{4}{405}x-\frac{7}{234}>\frac{2}{543}x-\frac{1}{825}$ $\left[x>\frac{3\,008\,763}{649\,220}\right]$

12 $\frac{354}{4}x-\frac{2048}{9}>\frac{2500}{3}x-\frac{653}{6}$ $\left[x<-\frac{2137}{13\,407}\right]$

Le disequazioni irrazionali

Risolvi con l'aiuto del computer le seguenti disequazioni irrazionali.

13 $\sqrt{x^2-3x+2}<2x+5$ $\left[\frac{\sqrt{253}}{6}-\frac{23}{6}<x\leq 1 \vee x\geq 2\right]$

14 $\sqrt{-x^2+9}<\frac{11-2x}{4}$ $\left[-3\leq x<\frac{11}{10}-\frac{\sqrt{59}}{5} \vee \frac{\sqrt{59}}{5}+\frac{11}{10}<x\leq 3\right]$

15 $\sqrt{x+4}<\frac{1}{5}(x-5)+3$ $[-4\leq x<0 \vee x>5]$

16 $\sqrt{8x^2-16x-48}>x+5$ $\left[x<\frac{13}{7}-\frac{2\sqrt{170}}{7} \vee x>\frac{13}{7}+\frac{2\sqrt{170}}{7}\right]$

17 $\sqrt{x^2+9}<\frac{x+6}{2}$ $[0<x<4]$

18 $\sqrt{x^2-3}>2x-2$ $[x\leq-\sqrt{3}]$

19 $\sqrt{x^2+6x}>4$ $[x<-8 \vee x>2]$

20 $\sqrt{5x^2+125}<\frac{1}{2}x-2$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

21 $\sqrt{-x^2+4}>2x+2$ $[-2\leq x<0]$

22 $2\sqrt{x^2-5x+4}<2x-3$ $[x\geq 4]$

23 $2\sqrt{3-2x-x^2}>x+3$ $\left[-3<x<\frac{1}{5}\right]$

24 $2\sqrt{4+2x+x^2}>\frac{2}{5}x-3$ $[\forall\, x\in\mathbb{R}]$

25 $\sqrt{4+x^2}<-\frac{3x+5}{4}$ $[\nexists\, x\in\mathbb{R}]$

26 $\sqrt{-x^2-20x}<6$ $[-20\leq x<-18 \vee -2<x\leq 0]$

27 $\sqrt{-4x^2+9}>\frac{11-2x}{4}$ $\left[\frac{11-16\sqrt{2}}{34}<x<\frac{11+16\sqrt{2}}{34}\right]$

28 $\sqrt{4x^2-9}>\frac{4-x}{2}$ $\left[x<-\frac{2\sqrt{199}}{15}-\frac{4}{15}\simeq-2{,}14756 \vee x>\frac{2\sqrt{199}}{15}-\frac{4}{15}\simeq 1{,}161423\right]$

29 $\sqrt{3x^2+x}>2x-3$ $\left[x\leq-\frac{1}{3} \vee 0\leq x\frac{\sqrt{133}}{2}+\frac{13}{2}\right]$

30 $\sqrt{x+4} < x-2$ $[x > 5]$

31 $\sqrt{-2+2x-x^2} < 3x-3$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

32 $\sqrt{x^2-1} < x^2-4$ $\left[x < -\sqrt{\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{9}{2}} \simeq -2,51053 \lor x > \sqrt{\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{9}{2}} \simeq 2,51053\right]$