LABORATORIO DI MATEMATICA
LE EQUAZIONI GONIOMETRICHE CON DERIVE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Derive:
- **discutiamo la seguente equazione goniometrica contenente il parametro reale k.**
  $\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 + 2(\sqrt{3} - \operatorname{tg} x)^2 = k$**, con la limitazione dell'angolo** $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$**;**
- **risolviamo l'equazione corrispondente al valore 5 del parametro k;**
- **tracciamo il grafico della funzione $k = k(x)$;**
- **evidenziamo nel grafico i risultati della discussione e la soluzione del caso proposto.**

La discussione con Derive

• Entriamo in ambiente Derive e inseriamo l'equazione nell'etichetta #1 (figura 1).
• Sostituiamo t a $\operatorname{tg} x$, facendo clic sull'equazione e poi sulle sue parti (in totale sei volte) sino a evidenziare TAN(x). Diamo quindi il comando *Semplifica_Sostituisci Sotto-espressioni* e nel campo *Nuovo valore* della finestra di dialogo digitiamo t e usciamo con OK. Vediamo la sostituzione nella #2.
• Sostituiamo a $\cos x$ la formula $\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$, cioè $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ (essendo il coseno positivo in $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ e avendo posto $t = \operatorname{tg} x$): facciamo clic sulla #3 e poi sulle sue parti (in totale cinque volte) sino a evidenziare cos(x), diamo il comando *Semplifica_Sostituisci Sotto_espressioni* e nel campo *Nuovo valore* digitiamo 1/SQRT(1 + t^2) e usciamo con OK. Vediamo la sostituzione nella #3.
• Con *Semplifica_Base* otteniamo nella #4 l'equazione espressa in funzione di t.
• Con *Risolvi_Espressione* ricaviamo le soluzioni dell'equazione nella #6.
• Per imporre alla prima radice trovata le limitazioni della tangente $0 \leq t \leq \sqrt{3}$, corrispondenti a quelle dell'angolo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, nella riga di editazione digitiamo 0, facciamo clic sul simbolo $\leq$, facciamo clic sulla #6, poi sulla radice, poi sul secondo membro, battiamo F3, facciamo clic sul simbolo $\leq$, digitiamo SQRT(3) e battiamo INVIO (figura 2).
• Con *Risolvi_Espressione* otteniamo nella #9 l'intervallo di accettabilità della prima soluzione.
• Operiamo similmente per l'altra radice, otteniamo nella #11 l'intervallo di accettabilità della seconda soluzione.

#1: $\left(\frac{1}{\text{COS}(x)}\right)^2 + 2\cdot(\sqrt{3} - \text{TAN}(x))^2 = k$

#2: $\left(\frac{1}{\text{COS}(x)}\right)^2 + 2\cdot(\sqrt{3} - t)^2 = k$

#3: $\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)}}}\right)^2 + 2\cdot(\sqrt{3} - t)^2 = k$

#4: $3\cdot t^2 - 4\cdot\sqrt{3}\cdot t + 7 = k$

#5: $\text{SOLVE}(3\cdot t^2 - 4\cdot\sqrt{3}\cdot t + 7 = k,\ t)$

#6: $t=\frac{\sqrt{3}\cdot(2-\sqrt{(k-3)})}{3} \vee t=\frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{(k-3)}+2)}{3}$

▲ **Figura 1** La semplificazione dell'equazione.

#7: $0 \leq \frac{\sqrt{3}\cdot(2 - \sqrt{(k-3)})}{3} \leq \sqrt{3}$

#8: $\text{SOLVE}\left(0 \leq \frac{\sqrt{3}\cdot(2 - \sqrt{(k-3)})}{3} \leq \sqrt{3},\ k\right)$

#9: $3 \leq k \leq 7$

#10: $\text{SOLVE}\left(0 \leq \frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{(k-3)} + 2)}{3} \leq \sqrt{3},\ k\right)$

#11: $3 \leq k \leq 4$

▲ **Figura 2** La discussione dell'equazione.

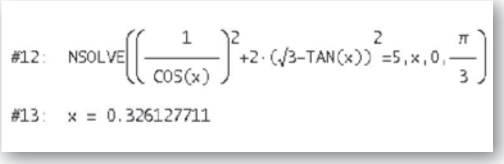
Leggendo la #9 e la #11, concludiamo che:

se $3 \leq k \leq 4$, l'equazione ammette due soluzioni accettabili;

se $4 < k \leq 7$, l'equazione ammette una soluzione accettabile.

Il caso proposto

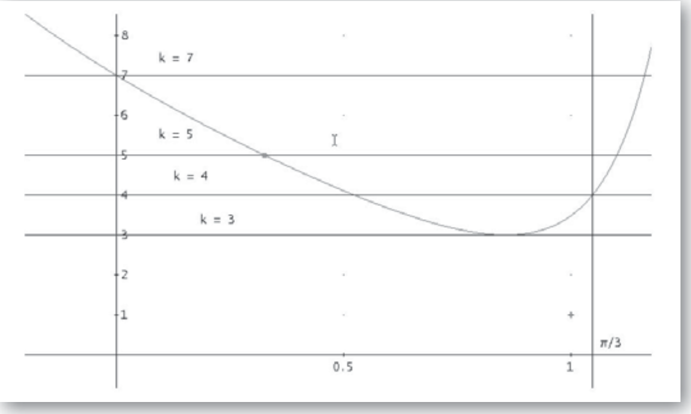
- Con *Semplifica_Sostituisci variabili*, applicato alla #1, sostituiamo 5 a k (figura 3).
- Diamo il comando *Risolvi_Espressione*. Nella finestra di dialogo scegliamo *Numericamente* e poi *Intervallo*, digitiamo 0 come estremo inferiore e $\frac{\pi}{3}$ come estremo superiore e usciamo con un clic su *Risolvi*.
- Nella #12 compare l'impostazione della soluzione e nella #13 la soluzione approssimata (per default con dieci cifre, fra intere e decimali), trovata da Derive con un procedimento numerico.



▲ **Figura 3** La soluzione del caso proposto.

Il grafico

- Lasciamo a te il compito di realizzare un grafico come quello di figura 4, dopo aver inserito nella zona algebrica i dati necessari per la sua realizzazione: l'estremo $x = \frac{\pi}{3}$, i valori notevoli del parametro $k = 4$, $k = 3$, $k = 7$, $k = 5$ e le coordinate [0,326127711, 5] del caso richiesto. Tieni presente che la funzione $k = k(x)$ si trova nella #1.



▲ **Figura 4** Il grafico di $k = k(x)$ nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer:

- **trova, tutte e sole, le soluzioni delle seguenti equazioni, appartenenti all'intervallo [0°; 360°[;**
- **svolgi la verifica utilizzando la più piccola soluzione trovata;**
- **traccia i grafici del primo e del secondo membro dell'equazione nell'intervallo [0°; 360°[.**

1 $4\sqrt{3} + \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = 12 - 2(\operatorname{tg} x - 1)^2$ [60°, 158°15′43″, 240°, 338°15′43″]

2 $\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$ [0°, 135°, 180°, 315°]

3 $4 \operatorname{cotg}^2 x + 1 = 6 - \left(\frac{2}{\operatorname{sen} x}\right)^2 + 4 \operatorname{cotg} x$ [55°39′59″, 100°22′16″, 235°39′59″, 280°22′16″]

4 $2\sqrt{2} \operatorname{sen} x \cos x - 1 = \sqrt{2} \operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 x$ [55°31′09″, 164°07′13″, 235°31′09″, 344°07′13″]

5 $2 \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{tg} x - 3$ [78°30′45″, 258°30′45″]

6 $\text{sen}\,(x - 60°) = \text{sen}\,(2x - 36°)$ [92°, 212°, 332°, 336°]

7 $\cos\,(45° - x) = \cos\,(2x - 18°)$ [21°, 141°, 261°, 333°]

8 $\text{sen}\left(\dfrac{x}{2} + 30°\right) = \text{sen}\,(2x - 40°)$ [46°40′, 76°, 220°, 286°40′]

9 $\text{sen}\,(x + 60°) = \cos\left(\dfrac{x}{3} - 40°\right)$ [52°30′, 322°30′]

10 $\dfrac{1}{\cos x} - \cos x = \dfrac{\sqrt{2} + 6 - 2\sqrt{2}\cos x}{4}$ [60°, 300°]

11 $\dfrac{1}{\text{tg}\,x - 2} = \dfrac{6}{5(\text{tg}\,x - 2)} - \dfrac{8}{5(3\,\text{tg}\,x - 1)}$ [71°33′54″, 251°33′54″]

12 $6(\cos x + \text{tg}\,x) = 2\cos x + \dfrac{9}{2\cos x} + \sqrt{3}$ [190°19′33″, 30°]

13 $6\,\text{sen}^2 x + 17\sqrt{3}\,\text{sen}\,x\cos x - 3\cos^2 x = -9$ [120°, 166°59′46″, 300°, 346°59′46″]

Date le seguenti equazioni goniometriche contenenti il parametro *k*, con l'aiuto del computer discuti e risolvi come nell'esercitazione guidata.

14 $200\,\text{sen}\,x + 50\cos x - k = 0$, con $0° \le x \le 90°$. Risolvi con $k = 150$.
[$50 \le k < 200$: una soluzione, $200 \le k \le 50\sqrt{17}$: due soluzioni; $x = 32°39'00''$]

15 $\cos^2 x - 2\cos x - k + 2 = 0$, con $0° \le x \le 90°$. Risolvi con $k = \dfrac{3}{2}$.
[$1 \le k \le 2$: una soluzione; $x = 72°52'08''$]

16 $50(2\cos x + \text{sen}\,x)(\cos x + 2\,\text{sen}\,x) = k$, con $0° \le x \le 90°$. Risolvi con $k = 225$.
[$100 \le k \le 225$: due soluzioni; $x = 45°$, soluzione doppia]

17 $\dfrac{1}{\cos x} + 3 - \sqrt{3}\,\text{tg}\,x - 4k = 0$, con $0° \le x \le 60°$. Risolvi con $k = \dfrac{3}{4}$.
$\left[\dfrac{1}{2} \le k < 1\text{; una soluzione; } x = 35°15'52''\right]$

18 $2\left|\cos^2 x - \text{sen}^2 x\right| = k\cos x$, con $0° \le x \le 90°$. Risolvi con $k = 3$.
[$0 \le k \le 2$: due soluzioni; $k > 2$: una soluzione; $x = 64°49'29''$]

19 $9\,\text{sen}\,x + \cos x + 1 - k = 0$, con $0° \le x \le 90°$. Risolvi con $k = 8$.
[$2 \le k < 10$: una soluzione, $10 \le k \le 1 + \sqrt{82}$: due soluzioni; $x = 44°17'09''$]

20 $4(2\,\text{sen}\,x\cos x + \cos x\,\text{sen}(120° - x)) = k$, con $0° \le x \le 90°$. Risolvi con $k = 3$.
[$0 \le k < 2\sqrt{3}$: una soluzione, $2\sqrt{3} \le k \le 2\sqrt{7} + \sqrt{3}$: due soluzioni; $x = 73°30'53''$]

21 $\text{tg}\,x\ \dfrac{9}{\cos x}(4\cos x - 3\,\text{sen}\,x) - 5k = 0$, con $0° \le x \le \arccos\dfrac{3}{5}$. Risolvi con $k = 2$.
$\left[0 \le k \le \dfrac{12}{5}\text{: due soluzioni; } x = 21°31'45'' \vee x = 43°11'35''\right]$