

## LABORATORIO DI MATEMATICA

## LE SUCCESSIONI

## ESERCITAZIONE GUIDATA

Per verificare che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n + 11}{2n + 7} = 2$ , con Excel costruiamo un foglio che, letto un valore  $\varepsilon > 0$ , permetta la ricerca dell'indice  $p_\varepsilon$ , tale che per tutti gli  $n \geq p_\varepsilon$  valga la disuguaglianza  $\left| \frac{4n + 11}{2n + 7} - 2 \right| < \varepsilon$ .

**Un procedimento numerico per la ricerca di  $p_\varepsilon$** 

Dopo aver ricevuto il valore di  $\varepsilon$ , cerchiamo l'indice  $p_\varepsilon$  con un procedimento numerico, basato sulla potenza di calcolo dell'elaboratore e da usarsi come verifica delle operazioni analitiche.

Implementiamo il procedimento di ricerca in modo che:

- richieda l'inserimento di un coefficiente intero positivo casuale;
- abbinati al coefficiente scelto un certo numero di indici consecutivi della successione, più esattamente determini un primo indice moltiplicando il coefficiente per 20 e scriva i venti indici seguenti;
- raccolga in una tabella i valori dei corrispondenti termini della successione;
- ponga a fianco di ognuno di essi un'istruzione condizionale, per cui se la disuguaglianza

$$\left| \frac{4n + 11}{2n + 7} - 2 \right| < \varepsilon:$$

- non è soddisfatta, mostri l'indicatore =;
- è soddisfatta per la prima volta, mostri l'indicatore <--;
- è soddisfatta per le volte successive, mostri l'indicatore ==.

Dopo aver attivato il procedimento con un coefficiente casuale, leggiamo gli indicatori: se vediamo che sono tutti =, facciamo ripartire il procedimento con un coefficiente maggiore di quello scelto inizialmente; se sono tutti ==, inseriamo un coefficiente minore. Proseguiamo con i tentativi, scegliendo ogni volta come nuovo coefficiente un valore intermedio fra quello che dà tutti simboli = e quello che dà tutti simboli ==, sino a che non appare il simbolo <--, che segnala l'indice  $p_\varepsilon$ .

**La costruzione del foglio**

- Entriamo in ambiente Excel e scriviamo le didascalie come nella figura 1 a pagina seguente.
- Mettiamo un bordo alle celle C6 e B11, che devono contenere rispettivamente il valore di  $\varepsilon$  e il coefficiente per la ricerca casuale di  $p_\varepsilon$ .
- Per ricavare gli indici della successione, scriviamo = B11\*20 in E2, = E2 + 1 in E3 e la copiamo sino alla E22.
- Otteniamo i corrispondenti valori dei termini della successione scrivendo = (4\*E2 + 11) / (2\*E2 + 7) in F2 e copiandola sino alla F22.
- Nella cella G2 inseriamo la formula = SE (ASS(F2 - \$B\$4) >= \$C\$6; "="; SE(E(ASS((4\*(E2 - 1) + 11)/(2\*(E2 - 1) + 7) - \$B\$4) >= \$C\$6; ASS(F2 - \$B\$4) < \$C\$6); "<--"; "==")) e la copiamo sino alla cella G22, in modo da controllare se la disuguaglianza non è soddisfatta o se è soddisfatta per la prima volta o per le volte successive.
- Per mostrare l'indice  $p_\varepsilon$  nella cella C8, quando la ricerca ha successo, inseriamo la formula = SE(G2 = "<--"; E2; "") in H2 e la copiamo sino alla H22, e la formula = SOMMA(H2:H22) in C8.

**L'indice di  $p_\varepsilon$  corrispondente al valore 0,001 di  $\varepsilon$** 

- Proviamo il foglio con  $\varepsilon = 0,001$ , immettendolo nella cella C6.
- Scegliamo il primo numero casuale, digitiamo 100 in B11 e vediamo nella colonna G che tutti gli indicatori sono uguali a ==. Proviamo con 60, un valore più piccolo e otteniamo tutti =; proseguiamo con 80 ottenendo tutti ==, con 70 tutti =, con 75 tutti ==, con 73 tutti =, sino a pervenire con 74 alla forma del foglio di figura 1.



|    | A                                    | B | C     | D | E    | F              | G   | H      |
|----|--------------------------------------|---|-------|---|------|----------------|-----|--------|
| 1  | Le successioni con Excel             |   |       |   | n    | a di n         |     | p di ε |
| 2  |                                      |   |       |   | 1480 | 1,998988877654 | =   |        |
| 3  | Le successione $(4n+11)/(2n+7)$      |   |       |   | 1481 | 1,998989558774 | =   |        |
| 4  | ha limite 2.                         |   |       |   | 1482 | 1,998990238977 | =   |        |
| 5  |                                      |   |       |   | 1483 | 1,998990918264 | =   |        |
| 6  | Inserisci il valore di ε             |   |       |   | 1484 | 1,998991596639 | =   |        |
| 7  |                                      |   | 0,001 |   | 1485 | 1,998992274101 | =   |        |
| 8  | il valore di p di ε è                |   |       |   | 1486 | 1,998992950655 | =   |        |
| 9  |                                      |   |       |   | 1487 | 1,998993626300 | =   |        |
| 10 | Inserisci il coefficiente di ricerca |   |       |   | 1488 | 1,998994301039 | =   |        |
| 11 |                                      |   | 74    |   | 1489 | 1,998994974874 | =   |        |
| 12 |                                      |   |       |   | 1490 | 1,998995647807 | =   |        |
| 13 |                                      |   |       |   | 1491 | 1,998996319839 | =   |        |
| 14 |                                      |   |       |   | 1492 | 1,998996990973 | =   |        |
| 15 |                                      |   |       |   | 1493 | 1,998997661209 | =   |        |
| 16 |                                      |   |       |   | 1494 | 1,998998330551 | =   |        |
| 17 |                                      |   |       |   | 1495 | 1,998998998999 | =   |        |
| 18 |                                      |   |       |   | 1496 | 1,998999666556 | =   |        |
| 19 |                                      |   |       |   | 1497 | 1,999000333222 | <-- | 1497   |
| 20 |                                      |   |       |   | 1498 | 1,999000999001 | ==  |        |
| 21 |                                      |   |       |   | 1499 | 1,999001663894 | ==  |        |
| 22 |                                      |   |       |   | 1500 | 1,999002327902 | ==  |        |

▲ Figura 1 Il foglio con il valore 1497 di  $p_\epsilon$  corrispondente al valore 0,001 di  $\epsilon$ .

- La disuguaglianza  $\left| \frac{4n+11}{2n+7} - 2 \right| < 0,001$ , quindi, è soddisfatta quando  $n \geq 1497$ .

## Esercitazioni

- 1 Costruisci un foglio che riceva il numero intero positivo  $h$  e che determini il valore del numero di Nepero  $e$  con un'approssimazione di  $10^{-h}$ . Utilizza le successioni  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  e  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ , che tendono a  $e$  rispettivamente per difetto e per eccesso.
- 2 Costruisci un foglio per rappresentare la successione  $c_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ .
- 3 Costruisci un foglio per determinare la radice quadrata di un numero  $a$  utilizzando la successione ricorsiva  $r_0 = a, r_{n+1} = \frac{1}{2}\left(r_n + \frac{a}{r_n}\right)$ . Per controllare il risultato, nel foglio inserisci il calcolo del quadrato della radice approssimata ottenuta.

Per ognuna delle seguenti coppie di successioni, che ammettono lo stesso limite indicato a fianco, costruisci un foglio che, letto un valore per  $\varepsilon$ , determini quale delle due soddisfa la disuguaglianza  $|a_n - l| < \varepsilon$  o  $|b_n - l| < \varepsilon$  per prima, cioè quella che ammette l'indice  $p_\varepsilon$  più piccolo.

**4**  $a_n = \frac{6n^2 + 6}{(n-1)^2}$ ,  $b_n = \frac{12n^3 + 1}{2n^3 - 4n^2 - 5n - 6}$ , limite comune 6.

**5**  $a_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$ ,  $b_n = \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ , limite comune 0.

**6**  $a_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ,  $b_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$ , limite comune 0.

Per ognuna delle seguenti coppie di successioni divergenti, costruisci un foglio che, letto un valore per  $M$ , determini quale delle due soddisfa la disuguaglianza  $|a_n| > M$  o  $|b_n| > M$  per prima, cioè quella che ammette l'indice  $p_M$  più piccolo.

**7**  $a_n = n^2 + n$ ,  $b_n = n^3$ .

**8**  $a_n = \frac{n^4 + n^3}{n^3 + 1}$ ,  $b_n = n^2 + 1$ .

**9** Costruisci un foglio per trovare dei valori approssimati di  $\pi$  trasformando in successione la somma infinita  $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

Per ognuno dei seguenti problemi sulle progressioni aritmetiche, costruisci un foglio per risolverlo. Prova il foglio con i dati indicati a fianco. Dopo aver risolto il problema, calcola e rappresenta nel foglio elettronico gli  $n$  termini per verifica. Determina poi la somma degli  $n$  termini sia con l'operatore SOMMA sia applicando la formula teorica.

**10** Dati il primo termine, l'indice  $n$ , il termine  $n$ -esimo, determina la ragione  $d$ . Prova con  $a_1 = 5$ ,  $n = 6$ ,  $a_6 = 25$ .

**11** Dati  $n$ , il termine  $n$ -esimo, la ragione  $d$ , determina il primo termine. Prova con  $n = 4$ ,  $a_4 = 8$ ,  $d = 2$ .

**12** Dati l'indice  $n$ , il primo termine, la ragione  $d$ , determina il termine  $n$ -esimo. Prova con  $n = 7$ ,  $a_1 = 39$ ,  $d = -5$ .

Opera come negli esercizi precedenti con i seguenti problemi sulle progressioni geometriche.

**13** Dati il primo termine, l'indice  $n$ , la ragione  $q$ , determina il termine  $n$ -esimo. Prova con  $a_1 = -9$ ,  $n = 5$ ,  $q = -\frac{1}{2}$ .

**14** Dati l'indice  $n$ , il termine  $n$ -esimo, la ragione  $q$ , determina il primo termine. Prova con  $n = 8$ ,  $a_8 = 2$ ,  $q = \frac{1}{2}$ .

**15** Dati il primo termine, l'indice  $n$ , il termine  $n$ -esimo, determina la ragione  $q$ . Prova con  $a_1 = 5$ ,  $n = 10$ ,  $a_{10} = 200$ .

Per ognuna delle seguenti successioni ricorsive costruisci un foglio per rappresentarne l'andamento e studiarne il limite.

**16**  $a_0 = 1$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{3 - 2a_n}$ . [1]

**17**  $a_0 = 1$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{4 + 3a_n}$ . [4]

**18**  $a_0 = 2$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ . [ $\sqrt{2}$ ]