LABORATORIO DI MATEMATICA
GLI INTEGRALI INDEFINITI

ESERCITAZIONE GUIDATA

Problema

Costruiamo un foglio che, dopo aver ricevuto i valori dei coefficienti a, b, c, d della funzione $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (con $c \neq 0$) e le coordinate di un punto $P(x_P; y_P)$, stabilisca il dominio di $f(x)$ e trovi $g(x)$, l'eventuale primitiva di $f(x)$ passante per P.
Nel foglio determiniamo poi per verifica alcuni valori di $g'(x)$ e li confrontiamo con quelli di $f(x)$.
Proviamo il foglio con $a = 1$, $b = -3$, $c = 1$, $d = 4$ e $P(1; -7\ln 5)$.

L'analisi del problema

Osserviamo che, se $c \neq 0$, $f(x)$ è una funzione razionale fratta con il dominio dato da $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Per integrare la funzione, raccogliamo $\dfrac{a}{c}$ e aggiungiamo e togliamo al numeratore $\dfrac{d}{c}$,

$$\int \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\int \frac{x + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} + \frac{b}{a}}{x + \frac{d}{c}}\, dx,$$

decomponiamo la frazione, semplifichiamo e integriamo:

$$\frac{a}{c}\int\left[1 + \frac{bc-ad}{a(cx+d)}\right]dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + \text{cost}.$$

Determiniamo $g(x)$ imponendo la condizione di passaggio per P e individuando il valore della costante indeterminata:

$$\text{cost} = y_P - \frac{a}{c}x_P - \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx_P + d|.$$

Per calcolare i valori della derivata di $g(x)$ applichiamo la formula $g'(x) \cong \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$, con h «sufficientemente piccolo».

La costruzione del foglio

- Scriviamo delle didascalie e mettiamo dei bordi alle celle B3, D3, B5, D5, B7 e D7 per indicare dove immettere i valori dei coefficienti di $f(x)$ e le coordinate del punto P.
- Scriviamo nel foglio i simboli degli operatori della $g(x)$ (noti dall'analisi del problema) a fianco delle celle nelle quali vengono elaborati i corrispondenti coefficienti numerici (figura 1).
- Scriviamo = SE(B5 = 0; "Il coefficiente in B5 deve essere diverso da 0"; "=") in G3 per il controllo del coefficiente c, = SE(B5 = 0; ""; − D5/B5) in J5 per stabilire il dominio di $f(x)$, = SE(B7 = J5; "Il punto P non è accettabile"; "=") in G7 per il controllo del punto P.
- Calcoliamo i coefficienti della primitiva $g(x)$ rispettivamente con le formule = B3/B5 in B9, = (B5*D3 − B3*D5)/B5^2 in D9, = B5 in F9, = D5 in H9.
- Determiniamo la costante cost scrivendo
= D7 − B3/B5*B7 − (B5*D3 − B3*D5)/B5^2*LN(ASS(B5*B7 + D5)) in J9.

Il caso proposto dal problema

- Proviamo il foglio immettendo i coefficienti di $f(x)$, cioè 1 in B3, -3 in D3, 1 in B5 e 4 in D5, e le coordinate di P, cioè 1 in B7 e = − 7*LN(5) in D7. Excel calcola i coefficienti della primitiva $g(x)$ e li mostra come in figura 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Gli integrali indefiniti con Excel										
2											
3		1	* x +	-3			=				
4	f(x) =	--									
5		1	* x +	4			Il dominio di f(x) è R -{			-4	}
6											
7	P(	1	;	-11,2661	)		=				
8											
9	g(x) =	1	* x +	-7	* ln |	1	*x +	4	| +	-1	

▲ **Figura 1** Il foglio con la funzione $f(x)$ e una sua primitiva $g(x)$.

La verifica

- Per svolgere la verifica proposta dal problema richiediamo gli estremi x_1 e x_2 di un intervallo I, controlliamo che I appartenga al dominio di $f(x)$, facciamo variare x in I e calcoliamo i corrispondenti valori di $g'(x)$ e di $f(x)$.
- Indichiamo dove immettere gli estremi x_1 e x_2 di I e l'incremento h inserendo delle didascalie e mettendo dei bordi alle celle B11, B13 e B19.
- Controlliamo gli estremi di I scrivendo = SE(B11 ≤ B13; SE(O(B11 > J5; B13 < J5); "I appartiene al dominio di f(x)"; "I non appartiene al dominio di f(x)"); "Gli estremi di I non sono corretti") in A15.
- Determiniamo il passo di x con la formula = (B13 − B11)/10 in B17.
- Per ottenere i valori di:
- x, scriviamo = B11 in F12, = F12 + B17 in F13 e la copiamo sino alla F22;
- $g'(x)$, scriviamo = (B9*(F12 + B19) + D9*LN(ASS(F9*(F12 + B19) + H9)) − (B9*F12 + + D9*LN(ASS(F9*F12 + H9))))/B19 in H12 e la copiamo sino alla H22;
- $f(x)$, scriviamo = (B3*F12 + D3)/(B5*F12 + D5) in J12 e la copiamo fino alla J22.
- Facciamo una prova immettendo -1 in B11, 7 in B13 e 0,001 in B19 (figura 2). Notiamo che i valori di $g'(x)$ si discostano di poco da quelli di $f(x)$. Possiamo migliorare l'approssimazione con un valore più piccolo per h.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
10											
11	x1 =	-1				x		g'(x)		f(x)	
12						-1		-1,33294		-1,33333	
13	x2 =	7				-0,2		-0,84186		-0,84211	
14						0,6		-0,52157		-0,52174	
15	I appartiene al dominio di f(x)					1,4		-0,29618		-0,2963	
16						2,2		-0,12894		-0,12903	
17	p =	0,8				3		7,14E-05		0	
18						3,8		0,102622		0,102564	
19	h =	0,001				4,6		0,186094		0,186047	
20						5,4		0,255359		0,255319	
21						6,2		0,313759		0,313725	
22						7		0,363665		0,363636	
23											

▲ **Figura 2** Il foglio con i valori di $g'(x)$ e di $f(x)$ a confronto per verifica.

Esercitazioni

Per ognuno dei casi seguenti, con l'aiuto del computer, trova la primitiva $g(x)$ della funzione $f(x)$ che passi per il punto indicato. In un medesimo riferimento cartesiano traccia i grafici di $g(x)$, di $f(x)$ e di $f'(x)$, evidenziando alcune delle rispettive caratteristiche.

1 $f(x) = \ln(x+4)$, $P(0; 8\ln 2)$. $[g(x) = (x+4)\ln(x+4) - x]$

2 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+5}$, $P\left(1; 1+\dfrac{\pi}{8}\right)$. $[g(x) = 0,5\text{arctg}(0,5x+0,5)+1]$

3 $f(x) = \dfrac{x^2-x-20}{x-1}$, $P(0;1)$. $[g(x) = -20\ln|x-1| + 0,5x^2+1]$

Per ognuno dei casi seguenti, dopo aver svolto l'analisi, costruisci un foglio che:
a) permetta di inserire i valori dei coefficienti della funzione $f(x)$ (con $a \neq 0$) e le coordinate di un punto $P(x_0; y_0)$;
b) stabilisca il dominio della $f(x)$;
c) determini l'eventuale primitiva $g(x)$ di $f(x)$ passante per P;
d) calcoli alcuni valori della $g'(x)$ con procedimento numerico e li confronti con quelli della $f(x)$ corrispondenti alle medesime x;
e) trovi, se esistono, i punti richiesti della $g(x)$.
Prova il foglio con i dati indicati a fianco.
Dopo aver letto la $g(x)$ trovata da Excel, determina sul quaderno i punti richiesti.

4 $f(x) = ax+b$, le intersezioni con l'asse x e l'estremante. $a=2$, $b=-5$ e $P\left(1; -\dfrac{7}{4}\right)$.
$[g(x) = x^2 - 5x + 2,25; (0,5; 0), (4,5; 0), (2,5; -4)]$

5 $f(x) = ax^2+bx+c$, gli estremanti e il flesso. $a=1$, $b=-3$, $c=-10$ e $P\left(2; -\dfrac{55}{3}\right)$.
$[g(x) = 0,3333x^3 - 1,5x^2 - 10x + 5; (-2; 16,33330), (5; -40,8333), (1,5; -12,25)]$

6 $f(x) = \dfrac{b}{ax+c}$, l'intersezione con l'asse y. $a=1$, $b=2$, $c=3$ e $P(-2; 2)$.
$[g(x) = 2\ln|x+3| + 2;\ (0; 4,1972)]$

7 $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x-1}$, gli estremanti. $a=1$, $b=-1$, $c=-20$ e $P(0; 1)$.
$[g(x) = -20\ln|x-1| + 0,5x^2 + 1;\ (-4; -23,1888), (5; -14,2259)]$

8 $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2-1}$, l'estremante. $a=1$, $b=-2$ e $P\left(2; \dfrac{3\ln 3}{2}\right)$.
$[g(x) = -0,5\ln|x-1| + 1,5\ln|x+1|;\ (2; 1,6479)]$

9 $f(x) = \dfrac{(x+1)^2(x-1)}{ax+b}$, l'estremante. $a=1$, $b=-2$ e $P\left(3; \dfrac{75}{2}\right)$.
$[g(x) = 9\ln|x-2| + 0,3333x^3 + 1,5x^2 + 5x;\ (1; 6,8333)]$

10 $f(x) = \sqrt{ax+c}$, l'intersezione con l'asse y. $a=1$, $c=4$ e $P\left(-3; -\dfrac{4}{3}\right)$.
$[g(x) = 0,6667\sqrt{(x^3+12x^2+48x+64)} - 2;\ (0; 3,3333)]$

11 $f(x) = \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$, gli asintoti.

Caso 1: $a = 1$, $b = -6$, $c = 8$ e $P(3; 1)$. $[g(x) = 0,5 \ln|x - 4| - 0,5 \ln|x - 2| + 1;\ x = 2, x = 4, y = 1]$

Caso 2: $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$ e $P\left(1; 1 + \dfrac{\pi}{8}\right)$. $[g(x) = 0,5 \text{ arctg } (0,5x + 0,5) + 1;\ y = 1,7854, y = 0,2146]$

Caso 3: $a = 1$, $b = 4$, $c = 4$ e $P\left(4; \dfrac{5}{6}\right)$. $\left[g(x) = -\dfrac{1}{(x + 2)} + 1; x = -2, y = 1\right]$

12 $f(x) = \dfrac{ax + b}{x^2 + 1}$, l'estremante. $a = 1$, $b = 1$ e $P(0; 1)$. $[g(x) = \text{arctg } x + 0,5 \ln (x^2 + 1) + 1; (-1; 0,5612)]$

13 $f(x) = \dfrac{a}{b + \sqrt{x}}$, il punto di ascissa 2. $a = 1$, $b = 1$ e $P(0; -1)$.
$[g(x) = -2 \ln(\sqrt{x} + 1) + 2\sqrt{x} - 1; (2; 0,0657)]$

14 $f(x) = \dfrac{ax}{\sqrt{1 + x^2}}$, le intersezioni con l'asse x. $a = -1$ e $P(1; 2)$.
$[g(x) = -\sqrt{1 + x^2} + 3,41421; (3,2645; 0), (-3,2645; 0)]$

15 $f(x) = \ln (ax + b)$, l'estremante. $a = 1$, $b = 4$ e $P(0; 8 \ln 2)$. $[g(x) = (x + 4) \ln (x + 4) - x; (-3; 3)]$

16 $f(x) = (x^2 - 1)e^{ax}$, gli estremanti. $a = -1$ e $P(0; 1)$. $[g(x) = 2 - e^{-x}(x^2 + 2x + 1); (-1; 2), (1; 0,5284)]$

17 $f(x) = (ax + b)e^{-x}$, l'estremante. $a = -5$, $b = 4$ e $P(-1; 2 - 4e)$. $[g(x) = e^{-x}(5x + 1) + 2; (0,8; 4,2466)]$