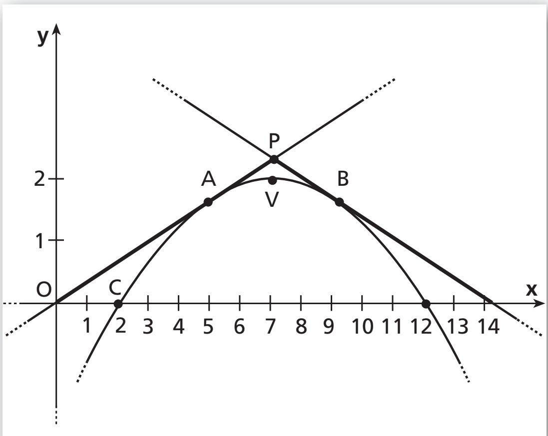
REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 La mansarda

Per ultimare l'edificazione di una villetta occorre costruire il tetto a due spioventi sopra la mansarda. Come dato di progetto è noto quanto segue: considerata una parabola nel piano cartesiano con la concavità rivolta verso il basso, di vertice $V(7; 2)$ e passante per $C(2; 0)$, i due spioventi poggiano sui punti della parabola di ascissa 5 e 9 e risultano tangenti alla parabola nei punti di contatto.

▶ Determina l'altezza massima del tetto e l'angolo formato dai due spioventi.

▶ La situazione è rappresentata nella seguente figura.



◀ **Figura 1**

Innanzitutto bisogna determinare l'equazione $y = ax^2 + bx + c$ della parabola noti il vertice V ___ e un punto $C($___$)$. Il sistema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 7 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \underline{\qquad} \\ b = \underline{\qquad} \\ c = \underline{\qquad} \end{cases} \rightarrow y = \underline{\qquad\qquad}.$$

I punti di ascissa 5 e 9 risultano quindi:

$$A\left(5; \underline{\quad}\right), \quad B\left(9; \underline{\quad}\right).$$

Scriviamo l'equazione delle rette tangenti nei punti A e B. Il coefficiente angolare della retta passante per A è la derivata della funzione calcolata nel punto considerato:

$$y' = \underline{\qquad\qquad} \rightarrow y'(5) = \underline{\quad}.$$

L'equazione della retta tangente in $A\left(5; \underline{\quad}\right)$ alla parabola è quindi:

$$y - \underline{\quad} = \underline{\quad}(x - 5) \rightarrow y = \underline{\qquad\qquad}.$$

Analogamente per il punto $B\left(9; \underline{\quad}\right)$ vale:

$$y'(9) = \underline{\quad} \rightarrow y - \underline{\quad} = \underline{\qquad\qquad} \rightarrow y = -\frac{8}{25}x + \frac{114}{25}.$$

Per determinare l'altezza … basta calcolare l'ordinata del punto di intersezione tra le due rette …

$$\begin{cases} y = \ldots x + \ldots \\ y = \ldots x + \ldots \end{cases} \rightarrow \text{ applicando il metodo di riduzione } \rightarrow \; y = \frac{58}{25} = 2{,}32.$$

Determiniamo l'angolo tra le due rette:

$$\operatorname{tg}\alpha = \ldots = \frac{\ldots}{1 - \frac{8}{25} \cdot \frac{8}{25}} \simeq 0{,}713 \; \rightarrow \; \alpha \simeq 35{,}5° \vee \alpha \simeq 180° - 35{,}5° = 144{,}5°.$$

Nel caso in esame l'angolo compreso tra le due rette per formare il tetto sarà quello di 144,5°.

2 L'autovelox

I due sensori di un particolare apparecchio autovelox distano 512 mm l'uno dall'altro. Un autoveicolo che transita davanti al sistema fa scattare il primo sensore e, dopo un certo intervallo di tempo Δt, il secondo. L'intervallo di tempo così misurato viene elaborato e trasformato in un numero che rappresenta la velocità del veicolo espressa in km/h. Se tale velocità supera quella consentita in quel tratto di strada, l'auto viene fotografata per ottenere il numero di targa ed emettere la sanzione.

- Se un'automobile impiega un tempo $\Delta t = 0{,}016$ secondi per essere rilevata dal secondo sensore e nella strada il limite di velocità è fissato a 90 km/h, la fotocamera scatterà la fotografia?
- La velocità calcolata con questo sistema è da ritenere una velocità media o istantanea?

- La velocità media di un corpo è data, in generale, dal rapporto fra lo spazio percorso Δs e l'intervallo di tempo Δt impiegato a percorrerlo.
  In questo caso $\Delta s =$ … m e $\Delta t =$ … s; la velocità media è quindi:

$$v_{media} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots \text{ m/s} = \ldots \text{ km/h} \; \ldots \; 90 \text{ km/h}.$$

  La velocità è … a quella consentita: il sistema scatterà la fotografia e l'automobilista riceverà la multa.

- La velocità istantanea al tempo t_0 di un corpo che occupa la posizione $s(t)$ è data dal limite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_{media} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\ldots}{\ldots} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\ldots}{\ldots} = \mathrm{D}\,[s(t)]_{t = t_0},$$

  in altre parole è la … della legge oraria $s(t)$ rispetto al tempo.

Nel contesto esaminato, l'intervallo di tempo $\Delta t = 0{,}016$ s è «estremamente piccolo», pertanto la velocità calcolata $v = 115{,}2$ km/h, che è la velocità … mantenuta nel tratto di lunghezza $\Delta s =$ … m, si può ritenere coincidente con la velocità istantanea.
(Lo stesso intervallo di tempo $\Delta t = 0{,}016$ s, in un contesto totalmente diverso come potrebbe essere quello degli esperimenti di fisica subatomica, dovrebbe invece essere considerato «estremamente grande», e le grandezze in gioco non potrebbero più essere considerate istantanee.)

3 **Il profitto marginale**

Un laboratorio artigianale produce sciarpe di qualità. Ogni mese ne vende 100 a un commerciante a € 35 l'una e generalmente riesce a vendere le altre a € 45 l'una. L'azienda sostiene un costo fisso mensile di € 1600, ogni sciarpa prodotta costa € 14 e in più c'è un costo variabile, che si può pensare proporzionale al cubo del numero di sciarpe prodotte, con costante di proporzionalità pari a € 0,0001.

- ▶ Esprimi il profitto mensile in funzione del numero di sciarpe prodotte, nell'ipotesi che vengano realizzati e venduti almeno 100 pezzi.
- ▶ Calcola la derivata di tale funzione, che viene chiamata *profitto marginale*.
- ▶ Utilizzando la definizione di derivata, interpreta il significato del profitto marginale.

▶ Indicando con x il numero di sciarpe prodotte, il ricavo è dato da:

$R(x) =$ ______ con $x \geq 100$,

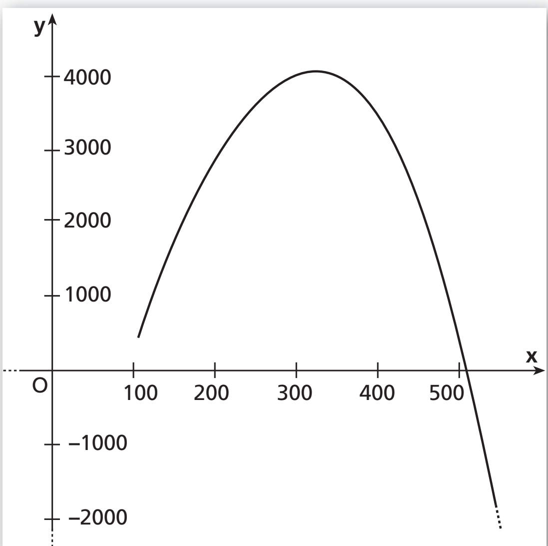
mentre i costi complessivi sono:

$C(x) =$ ______ con $x > 0$.

La funzione profitto risulta perciò:

$P(x) = R(x) - C(x) =$ ______ con $x \geq 100$.

Il grafico della funzione $P(x)$ è il seguente.

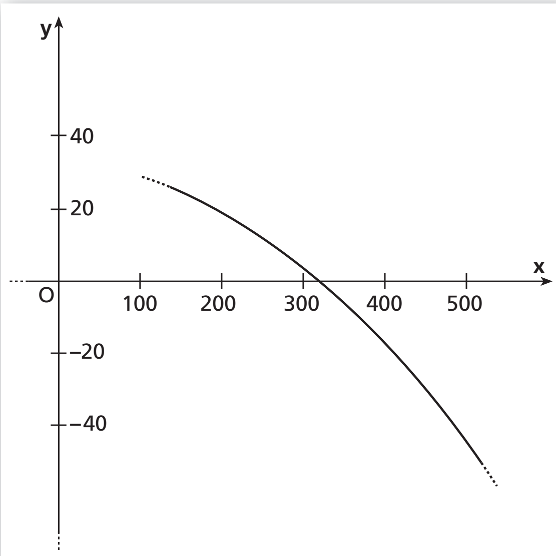


◀ **Figura 2**

▶ La derivata è:

$$P'(x) = \qquad\qquad, \quad x \geq 100.$$

Il grafico della funzione $P'(x)$ è il seguente.



◀ **Figura 3**

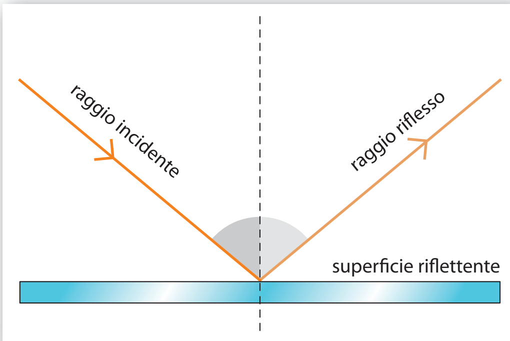
▶ La definizione di derivata è:

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x}.$$

Il profitto marginale rappresenta la variazione di profitto in rapporto alla variazione della produzione.
Sebbene l'abbiamo rappresentata con un grafico a linea continua, la funzione profitto ha come dominio l'insieme $\mathbb{N}$ e non $\mathbb{R}$ (il numero di pezzi prodotti è un numero naturale) e la situazione limite è la variazione di profitto relativa alla produzione di una unità in più, ovvero $P(x + 1) - P(x)$.

4 La riflessione della luce

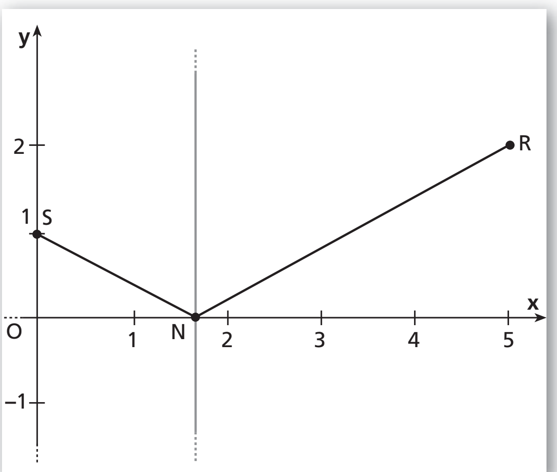
L'esperienza mostra che, quando un raggio luminoso incide su una superficie piana riflettente, il raggio riflesso forma con la normale al piano nel punto di incidenza un angolo uguale a quello di incidenza. Questa legge deriva dalla proprietà caratteristica della luce di seguire il percorso più breve possibile all'interno di uno stesso mezzo.



Nel piano cartesiano rappresentiamo uno specchio piano, visto in sezione, come una linea coincidente con l'asse x. Consideriamo i punti $S(0; 1)$, sorgente luminosa, e i punti $N(x; 0)$, con $0 < x < 5$, e $R(5; 2)$.

- Esprimi, in funzione di x, la lunghezza del percorso individuato dai segmenti SN e NR.
- Calcola la derivata di tale funzione lunghezza.
- Trova il punto stazionario della funzione lunghezza.
- Verifica che in corrispondenza del punto stazionario i segmenti SN e NR individuano il percorso effettivo del raggio luminoso.

- Rappresentiamo in un grafico la situazione.



◀ **Figura 4**

La lunghezza del percorso individuato dai segmenti SN ed NR è:

$$l(x) = \overline{SN} + \overline{NR} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$$

con $0 < x < 5$.

- Deriviamo la funzione $l(x)$; otteniamo:

$$l'(x) = \frac{2x}{\underline{\qquad}} + \frac{2x - 10}{\underline{\qquad}} = \underline{\qquad\qquad}.$$

- Dobbiamo determinare i punti per i quali la derivata è nulla:

$$l'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{x}{\underline{\qquad}} = \frac{5 - x}{\underline{\qquad}}.$$

Dato che entrambi i numeratori e denominatori sono positivi per le condizioni poste, possiamo elevare al quadrato, ottenendo l'equazione:

$$\underline{\qquad\qquad} = (5 - x)^2(x^2 + 1) \;\rightarrow\; 3x^2 + 10x - 25 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad} \;\rightarrow\; x_1 = \underline{\quad} \vee x_2 = \underline{\quad}.$$

L’unica soluzione accettabile è $x = \quad$.

▶ In corrispondenza del punto stazionario $x = \quad$ si ha il punto di coordinate $N\left(\quad ; 0\right)$.

I segmenti *SN* ed *NR* giacciono su rette di coefficiente angolare:

$$m_{SN} = \qquad = -\frac{3}{5},\ m_{NR} = \qquad = \qquad = \frac{3}{5}.$$

Quindi $m_{SN} = -m_{NR}$, i segmenti sono rispetto alla perpendicolare all’asse x (cioè allo specchio) passante per N. Questo mostra che i segmenti individuano il percorso del raggio luminoso.