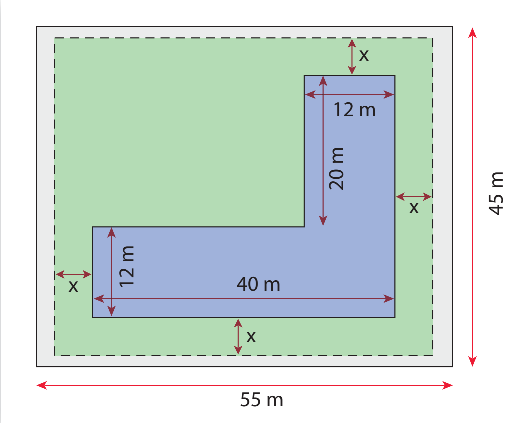
REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 Il caseggiato

Un'amministrazione comunale emana una gara d'appalto per la costruzione di un caseggiato su un terreno rettangolare di 55×45 m. Il bando prevede che il caseggiato a forma di L sia circondato da una zona verde di area almeno doppia rispetto a quella occupata dalla casa, se questa ha al massimo due piani; se la casa ha da tre a cinque piani, l'area della zona verde deve essere tre volte quella del fabbricato. Le dimensioni della casa sono quelle indicate in figura.

- ▶ Trova l'intervallo dei valori di x per i quali sono rispettate le condizioni poste.
- ▶ È possibile costruire una casa di cinque piani?



L'area occupata dalla casa è data da ______ $= 720$ m^2.
L'area del rettangolo verde che contiene la casa è data da

______ $= 4x^2 + 144x + 1280$.

L'area della sola zona verde è data dalla ______ tra le due aree trovate:

______ = ______.

Inoltre, per restare nei limiti del terreno disponibile, deve essere: $\begin{cases} 32 + 2x \leq 45 \\ 40 + 2x \leq 55 \end{cases}$, la cui soluzione è ______.

▶ Per la costruzione della casa di due piani deve essere $4x^2 + 144x + 560 \geq 2 \cdot 720$, ovvero $x^2 + 36x - 220 \geq 0$.
Le soluzioni sono $x \leq -41{,}32 \vee$ ______, di cui consideriamo solo l'intervallo a destra con le x positive (x rappresenta una lunghezza).

Quindi deve essere ______.

Ad esempio per $x = 5{,}32$ il rettangolo verde che contiene la casa ha per lati 50,64 m e 42,64 m, perciò è possibile la costruzione.

▶ Per la costruzione della casa di tre piani deve essere $4x^2 + 144x + 560$ ___ $3 \cdot 720$, ovvero ______, che ha come soluzione $x \leq -44{,}91 \vee x$ ______ e di nuovo è accettabile solo l'intervallo a destra con le x positive.
Con $x = 8{,}91$ il rettangolo ha per lati 57,82 m e 49,82 m, perciò non è possibile la costruzione perché si superano le dimensioni del terreno concesso.

2 Scatola di cioccolatini

Anna vuole costruire con un cartoncino colorato di 12×9 cm una scatoletta da riempire con almeno 10 cioccolatini preparati da lei. Per far questo, ritaglia dai quattro angoli del cartoncino quattro quadratini, per poi ripiegare i lembi laterali. I cioccolatini hanno la forma di parallelepipedi rettangoli di dimensioni $4 \times 2 \times 1$ cm.

- ▶ Quale misura deve avere il lato del quadratino da ritagliare perché la scatola abbia il volume corrispondente ad almeno 10 cioccolatini?
- ▶ Con le soluzioni limite trovate, quanti cioccolatini possono stare effettivamente nella scatola? Qual è la soluzione migliore?

▶ Indichiamo con x il lato di ogni quadratino agli angoli del cartoncino, che va ritagliato per costruire la scatola. In tal modo la scatola ha come base un rettangolo di lati ______ e $9 - 2x$ e l'altezza è x.
Il volume della scatola si può esprimere come ____________.
Il volume di ogni cioccolatino è $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8\ \text{cm}^3$.
Affinché la scatola contenga almeno 10 cioccolatini deve essere ____________ $\geq$ ______ con la limitazione $0 < x <$ ___ (data dal fatto che le dimensioni della scatola devono essere positive).
Svolgendo la disequazione si ottiene $4x^3 - 42x^2 + 108x \geq 80$, ovvero ____________ ≥ 0.
Per risolverla si può vedere che $P(2) = 0$ e procedere con la ____________, ottenendo $(x - 2)$ ____________ ≥ 0, in cui il primo fattore è positivo per $x > 2$, il secondo fattore per ____________. Con l'usuale regola dei segni si ottiene la soluzione ____________ e, tenendo conto delle limitazioni, la soluzione è ________.

▶ Analizziamo i due casi limite.
Con $x = 1{,}4$ la scatola ha il rettangolo di base di ______ cm e l'altezza di 1,4 cm; contiene perciò un solo strato di ___ cioccolatini.
Con $x = 2$ la scatola ha il rettangolo di base di ____ cm e l'altezza di 2 cm; contiene perciò ___ strati di ___ cioccolatini, ovvero 8 cioccolatini… a meno che…
Anna si accorge che se invece di disporre i cioccolatini «orizzontalmente» li dispone in verticale (cioè in modo che poggino sulla faccia di 4×1 cm), allora nella scatola ci stanno ____________ i cioccolatini.
La soluzione migliore è quindi quella di ritagliare i quadratini di lato $x = 2$ cm.

3 Altezza del satellite

La terza legge di Keplero afferma:

«I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite: $d^3 = KT^2$».

Il semiasse maggiore d può essere inteso anche come il raggio medio dell'orbita.
I satelliti geostazionari, che costituiscono la maggior parte dei satelliti per comunicazioni, hanno un periodo di rotazione di circa 24 ore, per cui restano sempre allineati al di sopra dello stesso punto della Terra.

- ▶ Sapendo che $K = \dfrac{GM}{4\pi^2}$, dove $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{m}^3\text{s}^2\text{kg}^{-1}$ è la costante di gravitazione universale, $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg è la massa della Terra, e che il periodo di rotazione T deve essere pari al giorno siderale, ovvero 23 h 56 min 4,09 s, determina a quale distanza dalla Terra deve ruotare un satellite geostazionario.
- ▶ Un altro satellite di osservazione deve passare su ogni punto della Terra almeno ogni ora e mezza. Qual è la distanza massima dalla Terra a cui deve viaggiare?

▶ Per calcolare l'altezza del satellite geostazionario basta applicare la legge, dopo aver espresso il periodo della Terra in secondi:

$$23\ \text{h}\ 56\ \text{min}\ 4{,}09\ \text{s} = (23 \cdot \underline{\qquad} + \underline{\qquad} + 4{,}09)\ \text{s} = \underline{\qquad\quad}\ \text{s};$$

$$d = \underline{\qquad} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{4 \cdot 3{,}14^2} \cdot \underline{\qquad\quad}} \simeq \underline{\qquad\quad}.$$

▶ Il satellite di osservazione si deve trovare a una distanza d tale che:

$$T \underline{\qquad} 1 \text{ h } 30 \text{ min} = 5400 \text{ s};$$

$$T^2 = \underline{\qquad} \leq 5400^2 \quad \rightarrow \quad d^3 \underline{\qquad\qquad} \quad \rightarrow \quad d \leq \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{4 \cdot 3,14^2} \cdot 5400^2}$$

il cui risultato approssimato è $\underline{\qquad\qquad}$.

4 **Lattine per bibite**

Il contenuto di una lattina di bibita deve essere di 33 cl, con una tolleranza del 10%. Si vuole che l'altezza della lattina sia il doppio del diametro di base.

▶ Quali sono i limiti massimo e minimo per il diametro di base?

▶ Ricordando che 33 cl $\underline{\qquad\qquad}$ dm^3, il volume V della lattina deve essere compreso tra:

$$\underline{\qquad\qquad} \leq V \leq \underline{\qquad\qquad} \quad \rightarrow \quad 0,297 \text{ dm}^3 \leq V \leq 0,363 \text{ dm}^3.$$

Indicando con x il diametro di base, quindi con $2x$ $\underline{\qquad}$, si ha $V = \underline{\qquad} \cdot \pi$.

Bisogna risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\pi \underline{\qquad} \\ 2x\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\pi \underline{\qquad} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^3}{2}\pi \leq 0,363 \\ \dfrac{x^3}{2}\pi \geq 0,297 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 0,614 \\ x \geq 0,574 \end{cases}$$

Il $\underline{\qquad\qquad}$ della lattina deve perciò essere compreso tra $\underline{\qquad}$ cm e $\underline{\qquad}$ cm.