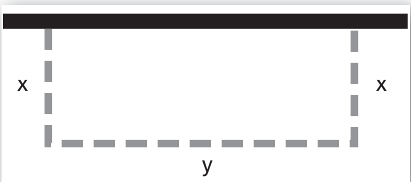
REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 La siepe

Sul retro di una villetta deve essere realizzato un piccolo giardino rettangolare di 50 m^2, riparato da una siepe posta lungo il bordo.

▶ Dato che un lato del giardino è occupato dalla parete della casa, quali dimensioni deve avere il giardino per minimizzare la lunghezza e, di conseguenza, il costo della siepe?

▶ Schematizziamo la situazione in figura.



◀ **Figura 1**

Indichiamo con L la lunghezza della siepe da allestire. Tenendo conto che un lato è già occupato (dalla parete della casa) si avrà:

$$L = \_\_\_\_$$

con la condizione che la superficie sia uguale a:

$$xy = 50 \rightarrow y = \frac{50}{x} \rightarrow L = \_\_\_\_.$$

Per minimizzare la funzione calcoliamo la sua derivata prima rispetto alla variabile x:

$$\frac{dL}{dx} = \_\_\_\_.$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$\_\_\_\_ \geq 0 \rightarrow \_\_\_\_ \geq 0 \rightarrow \_\_\_\_ \rightarrow x \leq -5 \vee x \geq 5.$$

Ignoriamo la soluzione ____ poiché x rappresenta la ____ di un rettangolo e quindi è ____.

La soluzione $x = 5$ rappresenta un ____ della funzione in quanto per ____ è $f'(x) < 0$, per ____ è $f'(x) > 0$.

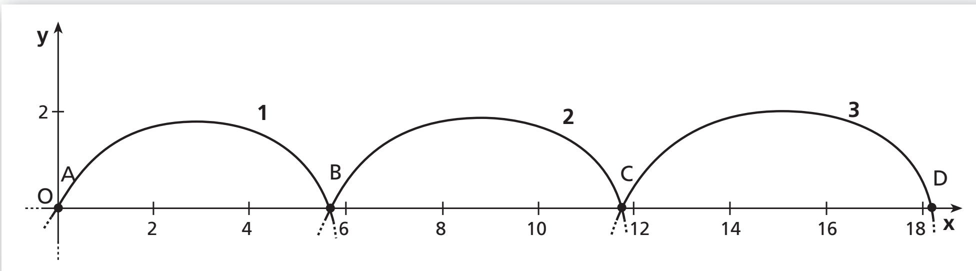
Il giardino con la siepe di lunghezza minima avrà dimensioni $x =$ ____ e $y =$ ____ m.

2 Salto triplo

Nel salto triplo l'atleta, dopo una rincorsa, raggiunge la zona di battuta, da dove effettua tre balzi consecutivi. Il record del mondo appartiene al britannico Jonathan Edwards ed è di 18,29 m. Esaminando il salto, si osserva che nel primo balzo (hop) la velocità di stacco (tangente) ha un'inclinazione di 15° rispetto alla pedana, nel secondo (step) di 13° e nell'ultimo (jump) di 17°. Le misure parziali dei tre balzi sono rispettivamente di 5,7 m, 5,9 m, 6,69 m.

- Fissato il sistema di riferimento nel punto di stacco del primo balzo, determina le funzioni delle traiettorie nei tre salti parziali (approssima i calcoli) e studia l'andamento degli stessi.

- Schematicamente i tre salti si presentano così:



◀ Figura 2

Per ciascuna delle tre traiettorie bisogna determinare l'equazione della parabola $y = \_\_\_\_$ avendo a disposizione 3 condizioni: passaggio per ____ e coefficiente angolare della ____ in uno di essi (che è individuato dalla ____ $y' = \_\_\_\_$ della funzione in quel punto).

Per la prima traiettoria si ha $A(0;0)$, $B(\_\_\_\_;0)$, $y'(x_A) = \_\_\_\_$, quindi:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 32,49a + \_\_\_\_ = 0 \\ b = \_\_\_\_ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \_\_\_\_ \\ b = \_\_\_\_ \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow y_1 = \_\_\_\_ x^2 + \_\_\_\_ x$$

Per la seconda traiettoria si ha $B(5,7;0)$, $C(\_\_\_\_)$, $y'(x_B) = \_\_\_\_$, quindi:

$$\begin{cases} \_\_\_\_ + c = 0 \\ 134,56a + \_\_\_\_ = 0 \\ \_\_\_\_ + b = \_\_\_\_ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \_\_\_\_ \\ b = \_\_\_\_ \\ c = -2,63 \end{cases} \rightarrow y_2 = \_\_\_\_ x^2 + \_\_\_\_ x - 2,63.$$

Per la terza traiettoria si ha $C(11,6;0)$, $D(\_\_\_\_;0)$, $y'(x_C) = \_\_\_\_$, quindi:

$$\begin{cases} 134,56a + 11,6b + c = 0 \\ 334,5241a + 18,29b + c = 0 \\ 23,2a + b = 0,31 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \_\_\_\_ \\ b = \_\_\_\_ \\ c = \_\_\_\_ \end{cases} \rightarrow y_3 = \_\_\_\_.$$

Per quanto riguarda gli intervalli di crescenza e decrescenza occorre studiare il segno della ____ nei tre balzi. Considerando anche gli intervalli in cui sono definite le tre funzioni, si ottiene:

$y_1' = \_\_\_\_ > 0 \rightarrow 0 < x < \_\_\_\_$, funzione crescente;

$y_2' = -0,08x + 0,69 > 0 \rightarrow \_\_\_\_ < x < 8,625$, funzione ____;

$y_3' = \_\_\_\_ > 0 \rightarrow \_\_\_\_ < x < \_\_\_\_$, funzione crescente.

3 **Luci sul palco**

La potenza elettrica P assorbita da ciascuna lampada utilizzata per illuminare un palcoscenico segue la seguente legge:

$$P(r) = \frac{V^2 R}{R^2 + 2Rr + r^2},$$

dove V indica la tensione (misurata in volt) e R la resistenza (misurata in ohm) di ciascuna lampada. r indica invece la resistenza interna al circuito. Abbiamo a disposizione lampade che funzionano a una tensione di 230 V e hanno una resistenza di 100 Ω.

- Studia l'andamento della potenza P di ciascuna lampada in funzione della resistenza interna r del circuito.
- Cosa succede se la resistenza interna al circuito diventa molto grande?
- La potenza P assume un valore massimo?

- Sostituiamo i valori di voltaggio e resistenza nella funzione della potenza:

$$P(r) = \frac{\ldots}{\ldots + \ldots r + r^2}.$$

Il dominio naturale della funzione è $\mathbb{R} - \{\ldots\}$, ma poiché r rappresenta una resistenza, deve essere r …: consideriamo quindi il dominio … .

Intersezioni con gli assi: se $r = 0$, $P(0) =$ … .

Non ci sono asintoti … perché $100^2 + 200r + r^2 \neq$ … per ogni … .
Poiché il denominatore ha grado … e il … ha grado 0, si ha:

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\ldots}{\ldots + \ldots r + r^2} = \ldots;$$

la funzione ha quindi l'asse delle … come asintoto … .
Calcoliamo la derivata prima e studiamone il segno.

$$P(r) = \frac{230^2 \cdot 100}{100^2 + 200r + r^2} = 230^2 \cdot 100 \cdot (100 + r)^{-2},$$

$$P'(r) = \ldots \cdot (100 + r)^{-3},$$

$$P'(r) < 0 \text{ per } r \geq 0 \text{ (ci limitiamo al dominio considerato).}$$

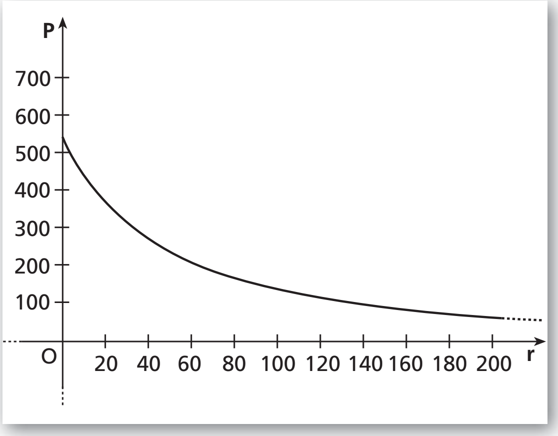
Dallo studio del segno della derivata prima si deduce che la funzione è sempre … per … .
Calcoliamo la derivata seconda e studiamone il segno:

$$P''(r) = \ldots \cdot (100 + r)^{-4},$$

$$P''(r) \ldots \text{ per } r \geq 0.$$

Dallo studio del segno della derivata seconda si deduce che la funzione ha … rivolta sempre verso … per $r \geq 0$.

La funzione $P(r)$ ha quindi l'andamento disegnato in figura.



◀ **Figura 3**

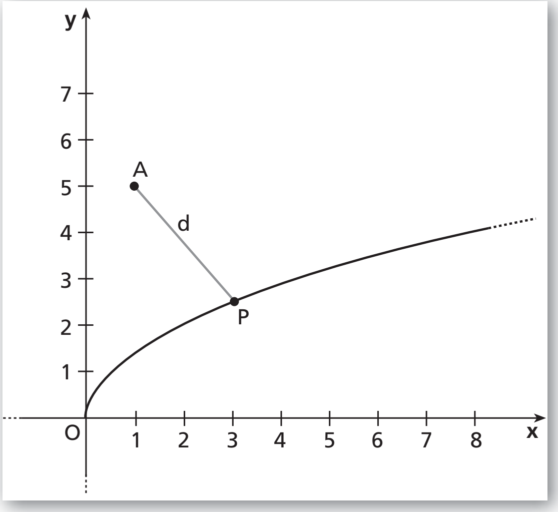
- Come si può vedere dal grafico e dall'espressione analitica della funzione, la ______ diminuisce tendendo asintoticamente a ___.
- La potenza assume il valore massimo $P =$ ______ per $r =$ ___.

4 **Il maratoneta**

Un atleta sta partecipando a una maratona; in un tratto il percorso segue una traiettoria di equazione $y^2 = 2x$ (con $x \geq 0$), rispetto a un opportuno sistema di assi. Nello stesso sistema, il suo allenatore si trova nel punto $A(1; 5)$ e gli deve lanciare una spugna bagnata per farlo idratare.

- In che punto del percorso il maratoneta si troverà più vicino al suo allenatore per ricevere la spugna?

- Disegniamo la traiettoria del percorso e il punto in cui si trova l'allenatore.



◀ **Figura 4**

L'equazione della traiettoria ha come grafico la parte di parabola, con vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse x, che attraversa il primo quadrante.

La distanza tra il punto $A(1; 5)$ e il punto $P(x; y)$ generico della curva è:

$d =$.

Se P appartiene alla parabola avrà coordinate P e la distanza da A diventa:

$d =$.

Invece di minimizzare d, minimizziamo d^2 in quanto il minimo di d coincide con il minimo di d^2:

$d^2 =$.

Deriviamo rispetto ad y:

$f'(y) = \quad = \quad = y^3 - 10.$

Studiamo il segno della derivata:

$y^3 \geq 10 \rightarrow \quad \simeq 2{,}2,$

$f'(y) < 0$ per , $f'(y) > 0$ per $y > \sqrt[3]{10}$.

Perciò il punto $y =$ corrisponde a un relativo della funzione.
Il punto in cui il maratoneta si troverà più vicino al suo allenatore avrà coordinate:

$P\left(\frac{y^2}{2}; y\right) = \quad \simeq$.