MAPPA DEI FONDAMENTALI

Funzioni crescenti e decrescenti

$y = f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo I e derivabile nei suoi punti interni:

- se $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ per ogni x interno a I, allora $f(x)$ è **crescente** in I;
- se $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ per ogni x interno a I, allora $f(x)$ è **decrescente** in I.

Massimi e minimi

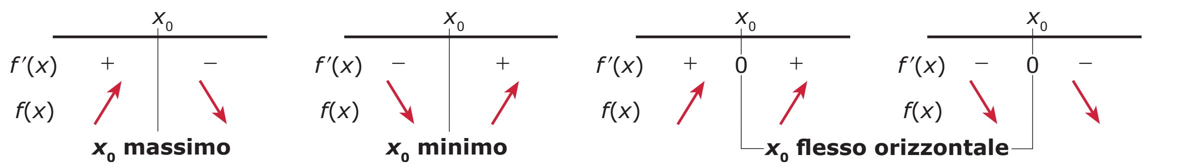
Data la funzione $y = f(x)$ con dominio D e dato il punto $x_0 \in D$, se

- $f(x_0) = M$ e $M \geq f(x)\ \forall x \in D$, allora x_0 è un punto di **massimo assoluto**;
- $f(x_0) = m$ e $m \leq f(x)\ \forall x \in D$, allora x_0 è un punto di **minimo assoluto**.

Se esiste un intorno I di x_0 tale che:

- $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in I$, x_0 è di **massimo relativo**;
- $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in I$, x_0 è di **minimo relativo**.

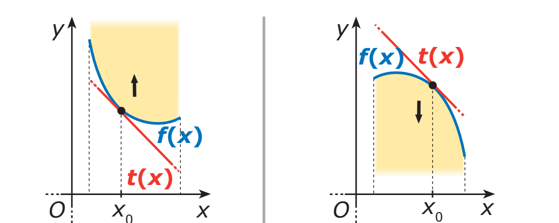
Nella pratica, si studia il segno della derivata prima di $f(x)$ individuando massimi, minimi ed eventuali flessi orizzontali della funzione.



Concavità e punti di flesso

$y = f(x)$ definita e derivabile in $]a; b[$,
$y = t(x)$ retta tangente alla curva $f(x)$.

- $f(x) > t(x)\ \forall x \in I \wedge x \neq x_0$, in x_0 la curva ha la **concavità verso l'alto**;
- $f(x) < t(x)\ \forall x \in I \wedge x \neq x_0$, in x_0 la curva ha la **concavità verso il basso**.



concavità verso l'alto **concavità verso il basso**

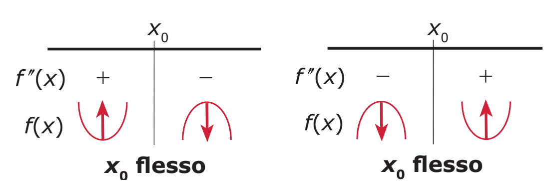
- Se in x_0 il grafico di $f(x)$ cambia concavità, la curva ha un punto di flesso che può essere orizzontale, obliquo o verticale.

Condizioni per la concavità e per i flessi

$y = f(x)$ definita e continua in I, con $x_0 \in I$;
$f'(x)$, $f''(x)$ definite e continue in I:

- se $f''(x_0) > 0$, **concavità verso l'alto**;
- se $f''(x_0) < 0$, **concavità verso il basso**;
- se $f''(x_0) = 0$, **condizione necessaria per un flesso**.

Nella pratica, si studia il segno della derivata seconda della funzione individuando concavità e flessi.



continua »

Studio di una funzione $y = f(x)$

1. Dominio D della funzione

2. Simmetrie (funzione pari o dispari)
Possono esserci solo se il dominio è simmetrico rispetto a O.
Se $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$, $\forall x \in D$ → funzione pari.
Se $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$, $\forall x \in D$ → funzione dispari.

3. Punti di intersezione con gli assi
Risolviamo i sistemi $\begin{cases} y = f(x) \\ \boldsymbol{x = 0} \end{cases}$ e $\begin{cases} y = f(x) \\ \boldsymbol{y = 0} \end{cases}$.

4. Segno della funzione
Risolviamo la disequazione $\boldsymbol{f(x) > 0}$.

5. Comportamento agli estremi del dominio
- Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio.
- Classifichiamo gli eventuali punti di discontinuità e singolarità.
- Cerchiamo gli eventuali asintoti.
Se almeno uno tra $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ è $+\infty$ o $-\infty$, allora $x = x_0$ è **asintoto verticale** per $f(x)$.
Se almeno uno tra $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ è uguale a $y_0 \in \mathbb{R}$, allora $y = y_0$ è **asintoto orizzontale** per $f(x)$.
Se non c'è asintoto orizzontale, può esserci quello **obliquo** $y = mx + q$, con
$m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ e $q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$, con $m, q \in \mathbb{R}$ e $m \neq 0$.

6. Derivata prima e suo dominio
- Studiamo il **segno di f'** e determiniamo gli intervalli in cui la funzione è **crescente** ($f' > 0$) e **decrescente** ($f' < 0$).
- Cerchiamo i punti di **massimo** o di **minimo** relativo e di flesso orizzontale.

7. Derivata seconda e suo dominio
- Studiamo il **segno di f''** e determiniamo gli intervalli in cui il grafico della funzione ha la **concavità** rivolta verso l'alto ($f'' > 0$) o verso il basso ($f'' < 0$).
- Cerchiamo **i punti di flesso**.

▶ Studiamo la funzione:
$y = f(x) = \dfrac{x+6}{2-x}$.

1. Dominio della funzione
$D: 2 - x \neq 0$ → $x \neq \mathbf{2}$.

2. Simmetrie (funzione pari o dispari)
Il dominio non è simmetrico rispetto a O, quindi non ci sono simmetrie.

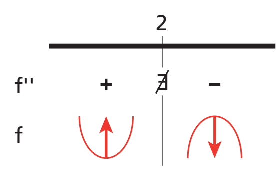
3. Punti di intersezione con gli assi
Se $x = \mathbf{0}$ → $y = 3$ → $A(\mathbf{0}; 3)$.
Se $y = \mathbf{0}$ → $x + 6 = 0$ → $x = -6$ → $B(-6; \mathbf{0})$.

4. Segno della funzione
$\dfrac{x+6}{2-x} > 0$ → $-6 < x < 2$ — **intervallo in cui $f(x)$ è positiva**

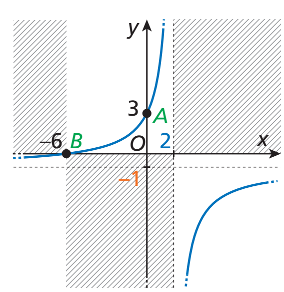
5. Comportamento agli estremi del dominio
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x+6}{2-x} = -1$ → $y = \mathbf{-1}$ asintoto orizzontale;
- non può esserci asintoto obliquo;
- $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+6}{2-x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+6}{2-x} = +\infty$ → $x = \mathbf{2}$ asintoto verticale.

6. Derivata prima e suo dominio
$f'(x) = \dfrac{8}{(2-x)^2}$, $\quad D: x \neq 2$.
$f'(x) > 0 \; \forall x \in D$, quindi $f(x)$ è crescente sia per $x < 2$ sia per $x > 2$.

7. Derivata seconda e suo dominio
$f''(x) = \dfrac{16}{(2-x)^3}$,
$D: x \neq 2$.
$f''(x) > 0$ se $x < 2$.
La concavità è rivolta verso l'alto per $x < 2$, verso il basso $x > 2$.



Disegniamo il grafico di $f(x)$.



FAI IL PUNTO SUI FONDAMENTALI → p. 858