LABORATORIO DI MATEMATICA
LE EQUAZIONI IRRAZIONALI CON DERIVE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Derive discutiamo il numero delle soluzioni reali che può avere la seguente equazione irrazionale

$$\sqrt{x+h} = 2x + 2$$

al variare del parametro h.

Le soluzioni dell'equazione in funzione di *h*

• Entriamo in ambiente Derive, diamo *Crea_Espressione* e digitiamo nella riga di editazione delle espressioni l'equazione SQRT(x + h) = 2 * x + 2. Con OK la inseriamo nell'etichetta #1 della zona algebrica (figura1).

• Derive non risolve l'equazione irrazionale non conoscendo i valori del parametro h. Battiamo, allora, il tasto F4 importando l'equazione dalla zona algebrica alla riga di editazione delle espressioni fra parentesi. A fianco scriviamo ^2, per elevare al quadrato entrambi i membri dell'equazione ed eliminare la radice.

• Con OK la inseriamo nella #2.

• Usiamo *Risolvi_Espressione*, nella cui finestra di dialogo confermiamo l'equazione e usciamo con *Semplifica*, ottenendo nella #3 l'impostazione e nella #4 le soluzioni dell'equazione in funzione di h. Adesso verifichiamo se quelle trovate sono soluzioni accettabili dell'equazione originale.

#1: $\sqrt{(x + h)} = 2\cdot x + 2$

#2: $(\sqrt{(x + h)} = 2\cdot x + 2)^2$

#3: $\mathrm{SOLVE}((\sqrt{(x + h)} = 2\cdot x + 2)^2, x)$

#4: $x = \dfrac{\sqrt{(16\cdot h - 15)} - 7}{8} \vee x = -\dfrac{\sqrt{(16\cdot h - 15)} + 7}{8}$

◀ **Figura 1**

Le condizioni di esistenza delle soluzioni

Imponiamo le condizioni affinché l'equazione sia soddisfatta. Nel nostro caso sono: la condizione di esistenza del radicale, ovvero poniamo il radicando maggiore o uguale a 0, e la condizione che il secondo membro dell'equazione sia maggiore o uguale a 0.

• Dopo averlo evidenziato con dei clic successivi sull'equazione contenuta nella #1, importiamo nella riga di editazione il radicando x + h, a fianco battiamo ≥ 0, imponendo la condizione di esistenza del radicale, e lo inseriamo nella #5 (figura 2).

• Con *Risolvi_Espressione* ricaviamo nella #6 l'impostazione e nella #7 la soluzione della disequazione.

• Analogamente, operiamo per stabilire quando il secondo membro dell'equazione è positivo, come vediamo nella #8, nella #9 e nella #10.

#5: $x + h \geq 0$

#6: $\mathrm{SOLVE}(x + h \geq 0, x)$

#7: $x \geq -h$

#8: $2\cdot x + 2 \geq 0$

#9: $\mathrm{SOLVE}(2\cdot x + 2 \geq 0, x)$

#10: $x \geq -1$

◀ **Figura 2**

Gli intervalli di *h*

• Imponiamo le condizioni di esistenza alla prima soluzione dell'equazione nella #11 (figura 3). Devono essere entrambe soddisfatte, quindi usiamo la congiunzione logica per legare le due condizioni. Prendiamo il simbolo della congiunzione dalla tabella dei simboli matematici con un clic.

• Diamo *Risolvi_Espressione* ottenendo nella #13 l'intervallo dei valori del parametro *h* che rendono accettabile la prima soluzione.

• Operiamo similmente per il secondo radicale, trovando nella #16 i suoi intervalli di accettabilità.

#11: $\dfrac{\sqrt{(16\cdot h-15)}-7}{8} \ge -h \wedge \dfrac{\sqrt{(16\cdot h-15)}-7}{8} \ge -1$

#12: $\text{SOLVE}\left(\dfrac{\sqrt{(16\cdot h-15)}-7}{8} \ge -h \wedge \dfrac{\sqrt{(16\cdot h-15)}-7}{8} \ge -1,\ h\right)$

#13: $h \ge \dfrac{15}{16}$

#14: $-\dfrac{\sqrt{(16\cdot h-15)}+7}{8} \ge -h \wedge -\dfrac{\sqrt{(16\cdot h-15)}+7}{8} \ge -1$

#15: $\text{SOLVE}\left(-\dfrac{\sqrt{(16\cdot h-15)}+7}{8} \ge -h \wedge -\dfrac{\sqrt{(16\cdot h-15)}+7}{8} \ge -1,\ h\right)$

#16: $\dfrac{15}{16} \le h \le 1$

◀ **Figura 3**

La tabella dei risultati

• Diamo *Inserisci_testo* e nell'area vuota che il sistema ci presenta scriviamo il riassunto dei risultati trovati (figura 4).

```
h < 15/16:        nessuna soluzione
h = 15/16:        due soluzioni coincidenti
15/16 < h ≤ 1:    due soluzioni distinte
h > 1:            una soluzione
```

◀ **Figura 4**

Una verifica

• Svolgiamo una verifica usando l'istruzione VECTOR (figura 5). Facciamo assumere al parametro *h* dei valori presi all'interno dei vari intervalli evidenziati dalla discussione e facciamo risolvere a Derive le varie equazioni irrazionali corrispondenti.

• Diamo *Semplifica_Base* sull'istruzione VECTOR e nella #18 appaiono le risposte.

#17: $\text{VECTOR}\left([h,\ \text{SOLVE}(\sqrt{(x+h)} = 2\cdot x + 2,\ x)],\ h,\ \left[-1,\ \dfrac{15}{16},\ \dfrac{31}{32},\ 1,\ 3\right]\right)$

#18: $$\begin{bmatrix} -1 & x = -\dfrac{7}{8} - \dfrac{\sqrt{31}\cdot i}{8} \vee x = -\dfrac{7}{8} + \dfrac{\sqrt{31}\cdot i}{8} \\ \dfrac{15}{16} & x = -\dfrac{7}{8} \\ \dfrac{31}{32} & x = -\dfrac{\sqrt{2}}{16} - \dfrac{7}{8} \vee x = \dfrac{\sqrt{2}}{16} - \dfrac{7}{8} \\ 1 & x = -\dfrac{3}{4} \vee x = -1 \\ 3 & x = \dfrac{\sqrt{33}}{8} - \dfrac{7}{8} \end{bmatrix}$$

◀ **Figura 5**

Esercitazioni

Le equazioni irrazionali con parametro

Con l'aiuto di Derive discuti il numero delle soluzioni reali che possono avere le seguenti equazioni irrazionali al variare del parametro *k*.

1 $\sqrt{x-1} = h - x$ $[h \geq 1\text{: una sol.; } h < 1\text{: nessuna sol.}]$

2 $\sqrt{hx - x^2} = x$ $[h < 0\text{: una sol.; } h = 0\text{: una sol. doppia; } h > 0\text{: due sol.}]$

3 $\sqrt{1 + x^2} = -\frac{4x + h}{5}$ $[h < -3\text{: due sol.; } h = -3\text{: una sol. doppia: una; } h > -3\text{: nessuna sol.}]$

4 $\sqrt{1 - 3x} = x - h$ $\left[h \leq \frac{1}{3}\text{: una sol.; } h > \frac{1}{3}\text{: nessuna sol.}\right]$

5 $\sqrt{hx + 4} = x - 1$ $[h \geq 4\text{: una sol.; } h < 4\text{: nessuna sol.}]$

Le disequazioni lineari

Risolvi le seguenti disequazioni lineari con l'aiuto di Derive, svolgendo i vari passi, e infine controlla il risultato con il comando *Risolvi_Espressione*.

6 $10x + 8 < 7x - 24$ $\left[x < -\frac{32}{3}\right]$

7 $25x - 32 \geq 40x - 62$ $[x \leq 2]$

8 $\frac{4}{5}x - \frac{2}{3} > \frac{2}{3}x - \frac{6}{25}$ $\left[x > \frac{16}{5}\right]$

9 $\frac{5}{4}x - 2 > 2x - \frac{2}{5}$ $\left[x < -\frac{32}{15}\right]$

10 $\frac{7}{5}x + \frac{25}{9} < \frac{1}{2}x - \frac{7}{15} + \frac{19}{10}x$ $\left[x > \frac{146}{45}\right]$

11 $\frac{28}{27}x - \frac{7}{12} \leq \frac{5}{24}x - \frac{35}{72}$ $\left[x \leq \frac{21}{179}\right]$

12 $\frac{4}{405}x - \frac{7}{234} > \frac{2}{543}x - \frac{1}{825}$ $\left[x > \frac{3\,008\,763}{649\,220}\right]$

13 $\frac{354}{4}x - \frac{2048}{9} > \frac{2500}{3}x - \frac{653}{6}$ $\left[x < -\frac{2137}{13\,407}\right]$

Le disequazioni irrazionali

Risolvi con l'aiuto del Derive le seguenti disequazioni irrazionali. Osserva che:
1. **se una disequazione non ammette soluzioni, Derive dà in risposta *false* (falso);**
2. **se una disequazione ammette come soluzione l'insieme dei numeri reali, Derive dà in risposta *true* (vero).**

14 $\sqrt{x^2 - 3x + 2} < 2x + 5$ $\left[\frac{\sqrt{253}}{6} - \frac{23}{6} < x \leq 1 \vee x \geq 2\right]$

15 $\sqrt{-x^2 + 9} < \frac{11 - 2x}{4}$ $\left[-3 \leq x < \frac{11}{10} - \frac{\sqrt{59}}{5} \vee \frac{\sqrt{59}}{5} + \frac{11}{10} < x \leq 3\right]$

16 $\sqrt{x + 4} < \frac{1}{5}(x - 5) + 3$ $[-4 \leq x < 0 \vee x > 5]$

17 $\sqrt{8x^2 - 16x - 48} > x + 5$ $\left[x < \frac{13}{7} - \frac{2\sqrt{170}}{7} \vee x > \frac{13}{7} + \frac{2\sqrt{170}}{7}\right]$

18 $\sqrt{x^2+9} < \dfrac{x+6}{2}$ $[0 < x < 4]$

19 $\sqrt{x^2-3} > 2x-2$ $[x \le -\sqrt{3}]$

20 $\sqrt{x^2+6x} > 4$ $[x < -8 \vee x > 2]$

21 $\sqrt{5x^2+125} < \dfrac{1}{2}x-2$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

22 $\sqrt{-x^2+4} > 2x+2$ $[-2 \le x < 0]$

23 $2\sqrt{x^2-5x+4} < 2x-3$ $[x \ge 4]$

24 $2\sqrt{3-2x-x^2} > x+3$ $\left[-3 < x < \dfrac{1}{5}\right]$

25 $2\sqrt{4+2x+x^2} > \dfrac{2}{5}x-3$ $[\forall\, x \in \mathbb{R}]$

26 $\sqrt{4+x^2} < -\dfrac{3x+5}{4}$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

27 $\sqrt{-x^2-20x} < 6$ $[-20 \le x < -18 \vee -2 < x \le 0]$

28 $\sqrt{-4x^2+9} > \dfrac{11-2x}{4}$ $\left[\dfrac{11-16\sqrt{2}}{34} < x < \dfrac{11+16\sqrt{2}}{34}\right]$

29 $\sqrt{4x^2-9} > \dfrac{4-x}{2}$ $\left[x < -\dfrac{2\sqrt{199}}{15} - \dfrac{4}{15} \simeq -2{,}14756 \vee x > \dfrac{2\sqrt{199}}{15} - \dfrac{4}{15} \simeq 1{,}161423\right]$

30 $\sqrt{3x^2+x} > 2x-3$ $\left[x \le -\dfrac{1}{3} \vee 0 \le x \dfrac{\sqrt{133}}{2} + \dfrac{13}{2}\right]$

31 $\sqrt{x+4} < x-2$ $[x > 5]$

32 $\sqrt{-2+2x-x^2} < 3x-3$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

33 $\sqrt{x^2-1} < x^2-4$ $\left[x < -\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}}{2} + \dfrac{9}{2}} \simeq -2{,}51053 \vee x > \sqrt{\dfrac{\sqrt{13}}{2} + \dfrac{9}{2}} \simeq 2{,}51053\right]$