

LABORATORIO DI MATEMATICA

LE FUNZIONI E LE LORO PROPRIETÀ CON DERIVE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Data la famiglia di funzioni

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + px + q}}{ax + b}, \quad \text{con } a \neq 0,$$

scriviamo un programma nel linguaggio di Derive che, dopo aver letto un valore per ognuno dei parametri, indichi il dominio della funzione corrispondente.

Proviamo il programma supponendo $p = -3$, $q = 2$, $a = 2$, $b = -6$ e tracciamo per verifica il grafico della funzione ottenuta.

L'analisi del problema

Per ottenere il dominio della funzione dobbiamo porre maggiore o uguale a 0 il radicando della radice posta al numeratore e diverso da 0 il denominatore.

L' algoritmo risolvete

Scriviamo l'algoritmo risolvete.

```

Inizio
Leggi p, q, a, b
Controlla il coefficiente a
Crea la matrice uscita con riga 1:   La g(x) = sqrt(x^2 + p*x + q)/(a*x + b)
Calcola x_d = - b/a
Calcola Δ = p^2 - 4q
Se Δ > 0,
    allora
    Calcola x_1 = (-p - sqrt(Δ))/2 e x_2 = (-p + sqrt(Δ))/2
    Se (x_d ≤ x_1 o x_d ≥ x_2)
        allora
        Inserisci la riga 2 nella matrice uscita :   || D (x ≤ x_1 o x ≥ x_2) e x ≠ x_d
        altrimenti
        Inserisci la riga 2 nella matrice uscita :   || D x ≤ x_1 o x ≥ x_2
    altrimenti
    Inserisci la riga 2 nella matrice uscita :       || D x ≠ x_d
Scrivi la matrice uscita
Fine
    
```

Il programma nel linguaggio di Derive

- Scegliamo *Parola* nel campo *Nome delle variabili* di *Opzioni_Modalità Input*.
- Traduciamo l'algoritmo nel linguaggio di Derive, scrivendolo sulla riga di editazione delle espressioni.
`Funz_01(p, q, a, b) := Prog(If(a = 0, RETURN "Il coefficiente a deve essere diverso da zero"), uscita := [{"La g(x) =", SQRT(x^2 + p * x + q)/(a * x + b)}], x_d := - b/a, Δ := p^2 - 4 * q, If(Δ > 0, Prog(x1 := (-p - SQRT(Δ))/2, x2 := (-p + SQRT(Δ))/2, If (x_d ≤ x1 ∨ x_d ≥ x2, uscita := INSERT(["|| D", (x ≤ x1 ∨ x ≥ x2) ∧ x ≠ x_d], uscita, 2), uscita := INSERT(["|| D", x ≤ x1 ∨ x ≥ x2], uscita, 2))), uscita := INSERT(["|| D", x ≠ x_d], uscita, 2)), RETURN uscita) e con INVIO lo inseriamo nell'etichetta #1 della zona algebrica (figura 1).`



```

Funz_01(p, q, a, b) :=
  Prog
  If a = 0
    RETURN "Il coefficiente a deve essere diverso da zero"
  uscita := [{"La g(x)=", sqrt(x^2 + p*x + q)/(a*x + b)}]
  xd := - b/a
  Δ := p^2 - 4*q
  If Δ > 0
  #1:
  Prog
  x1 := (-p - sqrt(Δ))/2
  x2 := (-p + sqrt(Δ))/2
  If xd ≤ x1 ∨ xd ≥ x2
    uscita := INSERT(["I1 D", (x ≤ x1 ∨ x ≥ x2) ∧ x ≠ xd], uscita, 2)
  uscita := INSERT(["I1 D", x ≤ x1 ∨ x ≥ x2], uscita, 2)
  uscita := INSERT(["I1 D", x ≠ xd], uscita, 2)
  RETURN uscita
  
```

◀ Figura 1 Il programma nel linguaggio di Derive.

Un'esecuzione del programma

- Immettiamo nell'etichetta #2 il nome che abbiamo assegnato al programma seguito dai valori richiesti dal problema (figura 2).
- Su di essa diamo il comando *Semplifica_Base*, ottenendo l'output del programma nell'etichetta #3.

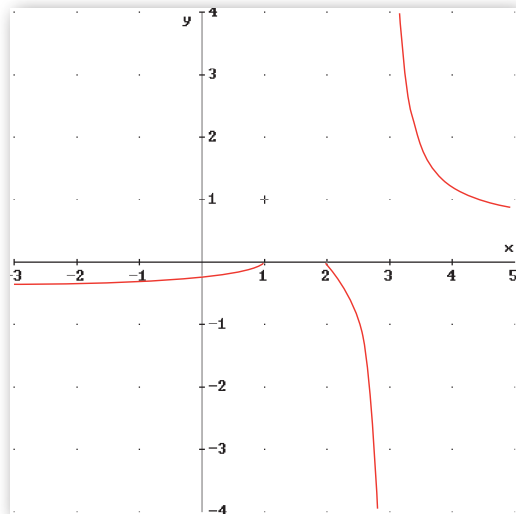
#2: Funz_01(-3, 2, 2, -6)

#3:
$$\left[\begin{array}{l} \text{La } g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{2 \cdot (x - 3)} \\ \text{I1 D} \quad x \neq 3 \wedge (x \leq 1 \vee x \geq 2) \end{array} \right]$$

▲ Figura 2 L'esecuzione del programma.

Il grafico della funzione

- Evidenziamo l'espressione della funzione con un clic sull'etichetta #3 e poi un altro sulla prima riga della matrice e infine un clic sull'espressione. Entriamo in ambiente grafico con *Finestra_Grafica 2D*, dove con *Traccia il grafico* realizziamo il grafico della funzione (figura 3).
- Dal grafico ricaviamo una conferma che la funzione non è definita per $1 < x < 2$ e per $x = 3$.



► Figura 3 Il grafico della funzione.

Esercitazioni

Per ognuna delle seguenti famiglie di funzioni scrivi un programma nel linguaggio di Derive che, dopo aver letto il valore dei parametri in essa contenuti, indichi il dominio e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani della funzione ottenuta.

1 $f(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{ax+b}$, con $a \neq 0$.

4 $f(x) = \ln \frac{x-k}{ax-4}$, con $a \neq 0$.

2 $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x^2-k}$, con $a \neq 0$.

5 $f(x) = \frac{\sqrt{ax+b}}{x-x^2}$, con $a \neq 0$.

3 $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{ax^2+4}}$, con $a \neq 0$.

6 $f(x) = \frac{ax+b}{\sqrt{x^2-3x-4}}$, con $a \neq 0$.

Per ognuna delle seguenti funzioni f ricava la funzione inversa f^{-1} operando opportune restrizioni del dominio della f . Costruisci un grafico in un riferimento monometrico dove appaiano gli andamenti della f e della f^{-1} e della retta r , la bisettrice del primo quadrante. Determina le coordinate di tre punti della f e congiungili con i simmetrici rispetto alla r appartenenti al grafico della f^{-1} .

7 $f: x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

9 $f: x \mapsto 2x^3 - 2$

8 $f: x \mapsto x^2$

10 $f: x \mapsto \frac{1}{x-1}$

Per ognuna delle seguenti funzioni, dall'andamento della $f(x)$, studia quello di $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, $l(x) = \ln(f(x))$, $s(x) = e^{f(x)}$, $q(x) = f(x)^2$, $r(x) = \sqrt{f(x)}$ e $c(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

11 $f(x) = x - 2$

12 $f(x) = 4x - x^2$

13 $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$

Con l'aiuto di Derive determina il dominio, il segno e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani delle funzioni f e g e delle funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$.

Con la grafica di Derive traccia poi in un riferimento cartesiano il grafico delle funzioni f e g e della funzione composta $f \circ g$ e in un altro quello della f e della g e della funzione composta $g \circ f$. In entrambi i grafici evidenzia le intersezioni trovate.

14 $f(x) = \frac{1}{2}x - 2, \quad g(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$.

15 $f(x) = \sqrt{x+5}, \quad g(x) = x^2 - 4$.

16 $f(x) = |x^3 - 4x|, \quad g(x) = \frac{x^2-1}{x}$.

17 $f(x) = (x-1)^3, \quad g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$.

18 $f(x) = \ln(x^2 - x - 2), \quad g(x) = e^x$.

19 $f(x) = \sin x, \quad g(x) = x^2$.

20 $f(x) = \cos x, \quad g(x) = \ln(1+x)$.

21 $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

22 $f(x) = \sin x, \quad g(x) = 1 - \frac{3}{2x-1}$.

23 $f(x) = \frac{1}{x-2} + 2, \quad g(x) = \sqrt{x+2}$.

24 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ -x+2 & \text{se } x > 1 \end{cases}, \quad g(x) = \ln x$.

Con Derive stabilisci se le seguenti funzioni sono pari o dispari. Traccia il loro grafico. Se sono pari, segna tre punti e i loro simmetrici rispetto all'asse y . Se sono dispari, segna tre punti e i loro simmetrici rispetto all'origine. Se non sono né pari né dispari, trova ed evidenzia un punto i cui simmetrici rispetto all'asse y e all'origine non appartengono al grafico della funzione.

25 $f(x) = \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{9}$

29 $f(x) = (x^3 - x) \sin x$

26 $f(x) = 4 + \sqrt{1+x^3}$

30 $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2}$

27 $f(x) = \frac{2x^2-2}{3} \sin x$

31 $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2}$

28 $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{|x|}{x^2-1}$