LABORATORIO DI MATEMATICA
LA RETTA CON DERIVE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Troviamo il punto P, estremo del segmento PQ, sapendo che:

- **il punto Q è l'intersezione fra la retta p di equazione $y = \frac{1}{2}x + 6$ e la retta s passante per $S(1; -1)$ e perpendicolare a p;**
- **il punto M, punto medio di PQ, è l'intersezione con l'asse x della retta r di equazione $y = -\frac{4}{5}x + 2$.**

Tracciamo poi il grafico relativo al problema.

Scriviamo il percorso risolutivo

1. Determiniamo l'equazione della retta s come retta che passa per un punto ed è perpendicolare a un'altra retta.
2. Troviamo le coordinate di Q risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle rette p e s.
3. Troviamo le coordinate di M determinando l'intersezione della retta r con l'asse x.
4. Determiniamo le coordinate del punto P applicando la formula del punto medio.

Inseriamo un titolo e i dati del problema

- Diamo *Inserisci_Testo* per scrivere nel riquadro che appare in figura 1 il titolo del lavoro: Un problema sulle rette.
- Per immettere le equazioni delle rette p e r e le coordinate del punto S, usiamo tre volte *Crea_Espressione*, digitando rispettivamente
y = 1/2 * x + 6,
y = − 4/5*x + 2,
[1, − 1]
e confermando ogni volta con OK.

Un problema sulle rette

#1: $y = \frac{1}{2}\cdot x + 6$

#2: $y = -\frac{4}{5}\cdot x + 2$

#3: [1, -1]

▲ **Figura 1** I dati del problema.

Troviamo l'equazione della retta *s*

Poiché qui dobbiamo usare delle lettere indicizzate, stabiliamo che le variabili possano essere costituite da più di un carattere. Per tale motivo, diamo il comando *Opzioni_Modalità*, apriamo la finestra *Input*, dove selezioniamo *Parola*. Derive ci ricorda la nostra scelta con un messaggio nella #4 (figura 2).

- Per trovare l'equazione della retta s, digitiamo e inseriamo nella #5 l'equazione generica di una retta passante per un punto e perpendicolare a una retta data: y = − 1/m*(x − x0) + y.
- Applichiamo il comando *Semplifica_Sostituisci variabili*. Nella corrispondente finestra di dialogo compaiono tutte le variabili contenute nella #5, ignoriamo la proposta di sostituzione di x e di y, digitiamo 1 nel campo di sostituzione di x_0, − 1 in quello di y_0, 1/2 (il coefficiente angolare di p) in quello di m_1.
- Usciamo con un clic su *Semplifica*, ottenendo l'equazione della retta s nella #6.

#4: InputMode := Word

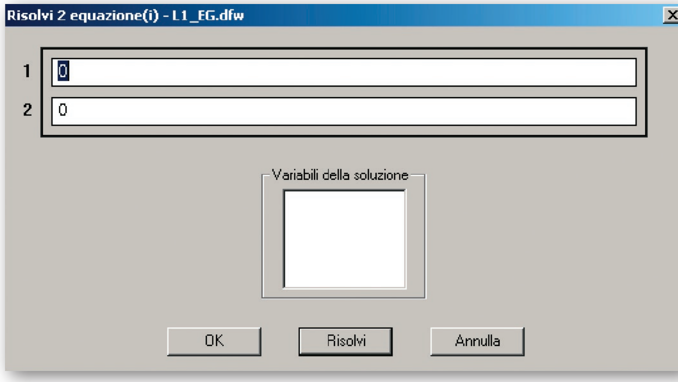
#5: $y = \left(-\frac{1}{m1}\right)\cdot(x - x0) + y0$

#6: $y = 1 - 2\cdot x$

▲ **Figura 2** L'equazione della retta *s*.

Troviamo le coordinate del punto *Q*

• Per trovare le coordinate del punto *Q*, mettiamo a sistema le equazioni delle rette *p* e *s*, usando il comando *Risolvi_Sistema*. Con la prima finestra di dialogo indichiamo a Derive che il sistema è formato da due equazioni. Nella seconda (figura 3) immettiamo nella prima riga l'equazione della retta *p*. Per far ciò evidenziamo con un clic l'etichetta #1, facciamo clic nel campo della prima equazione e battiamo il tasto F3.



▲ **Figura 3** La finestra di *Risolvi_Sistema*.

• In modo analogo inseriamo la seconda equazione, quella della *s*, contenuta nella #6. Nel campo sottostante indichiamo che le variabili sono *x* e *y* e usciamo con *Semplifica*. Nella #7 compare l'impostazione del sistema (figura 4) e nella #8 la sua soluzione, le coordinate di *Q*.

$$\#7:\quad \mathrm{SOLVE}\left(\left[y = \frac{1}{2}\cdot x + 6,\ y = 1 - 2\cdot x\right],\ [x,\ y]\right)$$

$$\#8:\quad [x = -2 \wedge y = 5]$$

▲ **Figura 4** Le coordinate del punto *Q*.

Determiniamo le coordinate del punto *M*

• Per trovare il punto *M* evidenziamo l'etichetta #2, contenente l'equazione della retta *r*, e applichiamo il comando *Semplifica_Sostituisci variabili*. Ignoriamo la proposta di sostituzione della *x* e alla variabile *y* sostituiamo 0. Con OK otteniamo l'etichetta #9 (figura 5).
• Facciamo clic su *Risolvi_Espressione* e poi su *Semplifica*, nella #11 appare l'ascissa di *M*.
• Digitiamo poi [5/2, 0] per vedere nella #12 le coordinate di *M*.

$$\#9:\quad 0 = -\frac{4}{5}\cdot x + 2$$

$$\#10:\quad \mathrm{SOLVE}\left(0 = -\frac{4}{5}\cdot x + 2,\ x\right)$$

$$\#11:\quad x = \frac{5}{2}$$

$$\#12:\quad \left[\frac{5}{2},\ 0\right]$$

▲ **Figura 5** Le coordinate del punto *M*.

Determiniamo le coordinate del punto *P*

• Inseriamo nella zona algebrica le formule del punto medio di un segmento: digitiamo e inseriamo nella #13: [xm = (x1 + x2)/2, ym = (y1 + y2)/2] (figura 6).
• Usiamo il comando *Semplifica_Sostituisci variabili*, digitiamo − 2 nel campo di sostituzione di x_1, 5/2 in quello di x_M, 5 in quello di y_1 e 0 in quello di y_M e ignoriamo la proposta di sostituzione di x_2 e di y_2.
• Usciamo dalla finestra di dialogo con *Semplifica*. Nella #15 vediamo le coordinate del punto *P*.

$$\#13:\quad \left[xm = \frac{x1 + x2}{2},\ ym = \frac{y1 + y2}{2}\right]$$

$$\#14:\quad \left[\frac{5}{2} = \frac{-2 + x2}{2},\ 0 = \frac{5 + y2}{2}\right]$$

$$\#15:\quad [x2 = 7,\ y2 = -5]$$

$$\#16:\quad \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

▲ **Figura 6** Le coordinate del punto *P*.

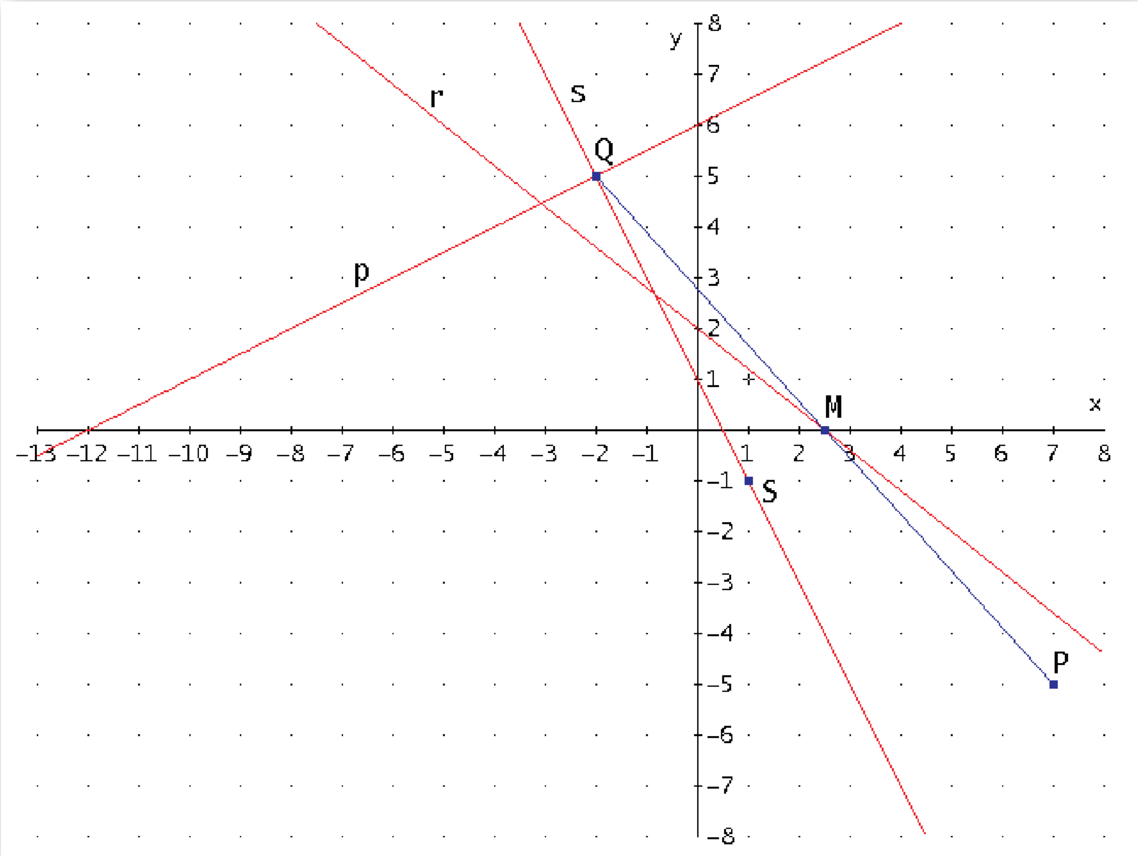
• A conclusione del problema e per il grafico successivo inseriamo nella #16 gli estremi noti del segmento *PQ*, digitando nella riga di editazione la matrice [[− 2, 5], [7, − 5]] con le coordinate trovate di *Q* e di *P*.

Tracciamo il grafico

Per costruire il grafico richiesto sfruttiamo gli strumenti grafici di Derive.

Aggiungiamo alcune indicazioni:

- Per ottenere il segmento *PQ* prima di fare clic su *Traccia il grafico*, applichiamo il comando *Opzioni_Visualizzazione*, selezioniamo *Punti*, aprendo una finestra di dialogo, dove nel campo *Collega* scegliamo *Sì*.
- Per inquadrare la zona del piano cartesiano che contiene gli elementi del problema, usiamo *Imposta_Intervallo del Grafico* e selezioniamo *Massimo/minimo*, dove scegliamo − 13 (il minimo), 8 (il massimo) e 21 (il numero delle tacche) per l'asse orizzontale e − 8, 8 e 16 per l'asse verticale.
- Per rendere il sistema monometrico e quindi vedere la perpendicolarità delle rette *p* e *s*, diamo *Imposta_Rapporto di aspetto* e, nella finestra di dialogo, facciamo clic su *Resetta*.
- Per scrivere nel piano cartesiano il nome dei punti e delle rette usiamo il comando *Inserisci_Annotazione*, posizionando la croce nel punto che desideriamo sia l'angolo in alto a sinistra del testo da inserire. Eventualmente con *Modifica_Annotazione* indichiamo al sistema di variarne le dimensioni, stabilite per default.
- Per cancellare un'annotazione, prima la evidenziamo con la croce, poi usiamo *Modifica_Cancella annotazione*.
- Al termine delle operazioni vediamo il grafico di figura 9.



▲ **Figura 7** Il grafico completo in un riferimento cartesiano monometrico.

Esercitazioni

Per ognuno dei seguenti problemi, svolgi un'accurata analisi, scrivendo sul quaderno lo schema del procedimento risolutivo. Attiva Derive e risolvi i quesiti secondo lo schema scritto. Realizza un grafico centrato e completo e stampalo. Riordina, stampa e salva in un file la sessione di lavoro.

1 Determina la distanza del punto P dal punto Q, sapendo che P è l'intersezione fra la retta r di equazione $y = x + 3$ e la retta s di equazione $y = -2x - 3$ e Q l'intersezione fra la retta t di equazione $y = 9$ e la retta z, che passa per $A(-6; -1)$ ed è parallela a r. $[\overline{PQ} = 10]$

2 Determina le coordinate dell'estremo P del segmento PQ, sapendo che l'altro estremo Q ha coordinate $(3; -4)$ e che il punto medio M di PQ è il punto di intersezione fra la retta u di equazione $y = -x + 1$ e la retta v, che passa per $S(3; 0)$ ed è perpendicolare alla retta r di equazione $y = \frac{1}{2}x$. $[P(7; -4)]$

3 Determina le coordinate dell'estremo B del segmento AB, sapendo che:

a) il suo punto medio M è il punto di intersezione fra la retta u di equazione $y = -x + 1$ e la retta v, che passa per $P(0; 3)$ ed è parallela alla retta r di equazione $y = -2x$;
b) l'altro estremo A ha coordinate $(-2; -3)$. $[B(6; 1)]$

4 Trova l'equazione della retta r passante per $P(1; -2)$ e parallela alla retta s, che passa per $A(1; 4)$ e per B, punto di intersezione fra le rette u di equazione $y = -x + 2$ e v di equazione $y = x - 4$. $\left[r: y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}\right]$

5 Trova l'equazione della retta r, sapendo che:

a) passa per il punto P, intersezione fra la retta u di equazione $y = x + 1$ e la retta v, che passa per $V(0; 7)$ ed è perpendicolare alla retta s di equazione $y = \frac{1}{2}x$;
b) è parallela alla retta s. $\left[r: y = \frac{1}{2}x + 2\right]$

6 Trova la distanza fra le rette parallele r e s, sapendo che r passa per $A(0; 5)$ e per B, punto di intersezione fra le rette u di equazione $y = -x - 1$ e v di equazione $x = -2$, e che s passa per l'origine. $[d = \sqrt{5}]$

7 Trova due punti, B e C, sull'asse x, sapendo che la loro distanza dal punto $A(-2; 0)$ è doppia rispetto alla loro distanza dal punto $P\left(\frac{9}{2}; 2\right)$. $\left[B(3; 0), C\left(\frac{31}{3}; 0\right)\right]$

8 L'ascissa di due punti, D ed E, è 2. Determina le loro ordinate, sapendo che distano $2\sqrt{2}$ dalla retta r di equazione $y = -x + 4$. $[D(2; -2), E(2; 6)]$

9 L'ordinata di due punti, F e G, è 7. Determina le loro ascisse, sapendo che distano $\sqrt{41}$ dal punto $U(3; 2)$. $[F(-1; 7), G(7; 7)]$

10 Determina le coordinate del vertice P del triangolo PQR, conoscendo le coordinate del vertice $Q(2; 7)$ e di $M(-1; 3)$ punto medio del lato QR, la misura 10 del lato RP e la retta del lato QP di equazione $y = -x + 9$. $[P(4; 5)]$

11 Trova l'area del triangolo ABC, i cui vertici hanno coordinate $A(-2; 0)$, $B(4; 0)$, $C(2; 5)$. $[S = 15]$

12 Trova l'area del triangolo PQR, i cui vertici hanno coordinate $P(2; 4)$, $Q(-4; 3)$, $R(-2; -3)$. $[S = 19]$

13 Trova l'area del triangolo ABC, i cui lati hanno equazioni: AB: $y=2x-1$, AC: $y=-x+2$, BC: $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$. $[S = 6]$

14 Determina le coordinate del vertice C di un triangolo isoscele, sapendo che l'area S è 12 e che la base ha estremi nei punti $A(-2; 3)$ e $B(2; -1)$. $[C_1(-3; -2), C_2(3; 4)]$

15 Trova le coordinate di un punto C, sapendo che si trova sull'asse y, che l'area del triangolo ABC è 3 e che le coordinate dei vertici sono $A(-2; 1)$ e $B(2; -2)$. $[C_1(0; -2), C_2(0; 1)]$

16 Trova le coordinate di un punto Q, sapendo che si trova sulla retta r di equazione $y = 2x - 1$, che l'area del triangolo PQR è $\frac{7}{4}$ e che le coordinate degli altri due vertici sono $P(0; 2)$ e $R\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$. $[Q_1(1; 1), Q_2(8; 15)]$

I fasci di rette con Derive

Nei seguenti fasci di rette, trova con Derive l'eventuale centro C e determina le rette, attraverso il valore del parametro k, che soddisfano le condizioni indicate. Verifica, poi, che esse soddisfano le proprietà imposte. Tracciane il grafico.

17 $y = kx - 2k + 4$;

a) parallela all'asse x;
b) formanti con gli assi cartesiani un triangolo di area 18;
c) formanti con gli assi cartesiani un triangolo isoscele.

$[C(2; 4)$; a) $k = 0$: $y = 4$; b) $k = -1$: $y = -x + 6$; $k = -4$: $y = -4x + 12$; c) $k = -1$: $y = -x + 6$; $k = 1$: $y = x + 2]$

18 $y = (k + 1)x - 4k + 2$;

a) passante per il punto $P(\sqrt{2}; 2\sqrt{2} - 2)$;
b) passante per il punto $(4; 6)$;
c) parallela alla retta $y = \frac{5}{2}x - 1$;
d) formanti con gli assi cartesiani un triangolo di area 50.

$\Big[C(4; 6)$; a) $k = 1$: $y = 2x - 2$; b) infinite; c) $k = \frac{3}{2}$: $y = \frac{5}{2}x - 4$; d) $k = -2$: $y = -x + 10$; $k = 8$: $y = 9x - 30$; $k = -\frac{3}{4}$: $y = \frac{1}{4}x + 5$; $k = -\frac{13}{4}$: $y = -\frac{9}{4}x + 15\Big]$

19 $kx + (k + 1)y - 2k + 2 = 0$;

a) parallela all'asse y;
b) distante dall'origine di $\frac{\sqrt{10}}{5}$;
c) distante dall'origine di $2\sqrt{5}$;
d) distante dall'origine di 5.

$\Big[C(4; -2)$; a) $k = -1$: $x = 4$; b) $k = \frac{1}{2}$: $x + 3y + 2 = 0$; $k = \frac{9}{4}$: $9x + 13y - 10 = 0$; c) $k = -\frac{2}{3}$: $2x - y - 10 = 0$; d) nessuno$\Big]$

20 $x + (2k - 1)y + k - 4 = 0$;

a) parallela all'asse y;
b) passante per il punto $G\left(\frac{2\sqrt{2} - 1}{2}; -2\right)$;
c) perpendicolare alla retta $y = -x$;
d) perpendicolare alla retta $y = 2x$;

(Suggerimento. Tieni presente che per vedere la perpendicolarità fra due rette in un sistema di riferimento cartesiano è necessario che esso sia monometrico. Con la grafica di Derive puoi variare le unità di misura della x e della y e, quindi, ottenere che diventino uguali, con i comandi *Imposta_Area* e *Opzioni_Punti Griglia* e con i bottoni degli zoom.)

$\Big[C\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; a) $k = \frac{1}{2}$: $x = \frac{7}{2}$; b) $k = \frac{2\sqrt{2} - 5}{6}$: $6x + 4(\sqrt{2} - 4)y + 2\sqrt{2} - 29 = 0$; c) $k = 0$: $x - y - 4 = 0$; d) $k = \frac{3}{2}$: $2x + 4y - 5 = 0\Big]$

21 $x - 2y + 2k - 2 = 0$;

a) passante per l'origine;
b) passante per il punto $E(-2; 2)$;
c) distanti dal punto E di $2\sqrt{5}$;

[Non esiste il centro; a) $k = 1$: $x - 2y = 0$; b) $k = 4$: $x - 2y + 6 = 0$; c) $k = -1$: $x - 2y - 4 = 0$; $k = 9$: $x - 2y + 16 = 0$]

22 $x + y + k - 4 = 0$;

a) formanti con gli assi cartesiani un triangolo di area 8;
b) formanti con la retta $2x - y = 0$ e l'asse y un triangolo di area $\frac{25}{6}$;
c) intersecanti il segmento di estremi $A(2; 1)$ e $B(5; 0)$.

[Non esiste il centro; a) $k = 0$: $x + y - 4 = 0$; $k = 8$: $x + y + 4 = 0$; b) $k = -1$: $x + y - 5 = 0$; $k = 9$: $x + y + 5 = 0$; c) $-1 \leq k \leq 1$]