LABORATORIO DI MATEMATICA
I PROBLEMI DI MASSIMO E MINIMO CON DERIVE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Dato il punto $Q(1; 2)$, determiniamo con l'aiuto di Derive le coordinate del punto P appartenente alla parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ e avente da Q distanza minima.
Nel medesimo riferimento cartesiano rappresentiamo poi i grafici della parabola e della funzione $d(x)$, che esprime il valore della distanza da Q di un generico punto della parabola, il segmento PQ e il punto M minimo assoluto del grafico di $d(x)$.

L'analisi del problema

Impostiamo la ricerca del punto P scrivendo la formula $d = \sqrt{(1-x)^2 + (2-y)^2}$, che dà la distanza di Q da un punto generico $(x; y)$. Poiché il punto deve appartenere alla parabola, sostituiamo nella formula alla y l'espressione $y = -x^2 + 4x$, ricavando la funzione $d(x)$.
Osserviamo che la funzione $d(x) = \sqrt{r(x)}$, essendo il radicando maggiore di 0, ha gli stessi estremanti di $r(x)$. Determiniamo e studiamo pertanto, per semplicità, la derivata di $r(x)$. Attraverso l'esame del suo segno stabiliamo l'andamento qualitativo della $r(x)$ e quindi della $d(x)$. Trovate le ascisse dei punti di minimo, stabiliamo per confronto qual è il minimo assoluto.

La sessione di lavoro

- Con *Crea_Espressione* digitiamo e inseriamo nella zona algebrica l'equazione della parabola e l'espressione della distanza PQ rispettivamente nella #1 e nella #2 (figura 1).
- Per sostituire la y con l'espressione della parabola, applichiamo *Semplifica_Sostituisci variabili* sulla #2, ignoriamo la richiesta di sostituzione della x e della d, facciamo clic sulla #1, sul secondo membro della #1, sul campo di sostituzione della y, battiamo il tasto F3 e usciamo dalla finestra di dialogo con *Semplifica*. Nella #3 compare la sostituzione della y e nella #4 la semplificazione della #3, che rappresenta la $d(x)$.
- Inseriamo il radicando $r(x)$ nella #5, facendo clic sulla #4, all'interno della radice e nella riga di editazione, e battendo F3 seguito da INVIO.
- Con il comando *Calcola_Derivata* seguito da *Semplifica*, determiniamo nella #6 l'impostazione e nella #7 l'espressione della derivata di $r(x)$.
- Per porla maggiore di 0, diamo *Crea_Espressione*, battiamo F3, importando nella riga di editazione delle espressioni la $r'(x)$, a fianco di essa digitiamo > 0 e con INVIO immettiamo la disequazione nella #8.
- Applichiamo sulla #8 il comando *Risolvi_Espressione* seguito da *Semplifica*, ottenendo l'impostazione nella #9 e la soluzione della disequazione nella #10.

#1: $y = -x^2 + 4\cdot x$

#2: $d = \sqrt{((1-x)^2 + (2-y)^2)}$

#3: $d = \sqrt{((1-x)^2 + (2-(-x^2+4\cdot x))^2)}$

#4: $d = \sqrt{(x^4 - 8\cdot x^3 + 21\cdot x^2 - 18\cdot x + 5)}$

#5: $x^4 - 8\cdot x^3 + 21\cdot x^2 - 18\cdot x + 5$

#6: $\frac{d}{dx}(x^4 - 8\cdot x^3 + 21\cdot x^2 - 18\cdot x + 5)$

#7: $4\cdot x^3 - 24\cdot x^2 + 42\cdot x - 18$

#8: $4\cdot x^3 - 24\cdot x^2 + 42\cdot x - 18 > 0$

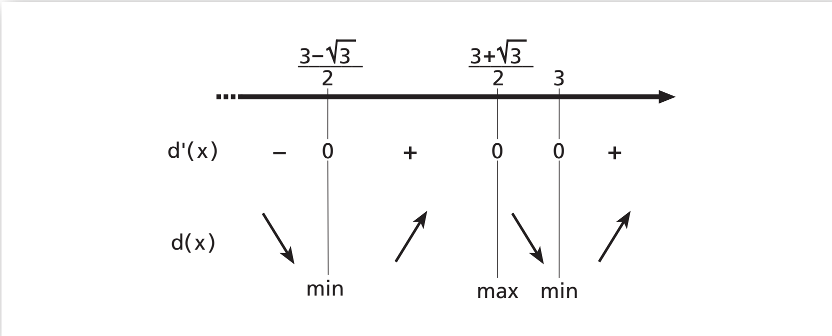
#9: $\text{SOLVE}(4\cdot x^3 - 24\cdot x^2 + 42\cdot x - 18 > 0,\ x)$

#10: $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \lor x > 3$

▲ **Figura 1** Lo studio della distanza di Q dai punti della parabola.

La distanza minima

Riportiamo il risultato di Derive in uno schema (figura 2), dal quale ricaviamo che la $r(x)$ e quindi la $d(x)$ ammettono due punti di minimo. Ritorniamo in ambiente Derive e cerchiamo il minimo assoluto.



◄ **Figura 2** Il segno della derivata di *r*(*x*) stabilito con Derive, dal quale ricaviamo l'andamento della *d*(*x*).

• Sostituiamo nell'espressione della distanza contenuta nella #4 l'ascissa del primo punto di minimo contenuta nella #10, ottenendo la #11 (figura 3).

• Su di essa diamo *Semplifica_Base* e *Semplifica_Approssima* in modo da ricavare la misura esatta della distanza nella #12 e quella approssimata nella #13.

• Operiamo in modo analogo per l'altra ascissa, determinando nella #15 e nella #16 le misure corrispondenti della distanza. Possiamo quindi dire, per confronto, che l'ascissa del punto *P*, il più vicino a *Q* fra quelli appartenenti alla parabola, è la prima.

• Determiniamo l'ordinata di *P* nella #18, sostituendo a *x* nella #1 l'ascissa trovata.

#11: $d=\sqrt{\left(\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4-8\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+21\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-18\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+5\right)}$

#12: $d=\sqrt{\left(\frac{11}{4}-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)}$

#13: $d = 0.3897740225$

#14: $d=\sqrt{(3^4-8\cdot 3^3+21\cdot 3^2-18\cdot 3+5)}$

#15: $d=\sqrt{5}$

#16: $d = 2.236067977$

#17: $y=-\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+4\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

#18: $y=3-\frac{\sqrt{3}}{2}$

▲ **Figura 3** La distanza minima e le coordinate del punto *P*.

#19: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} & 3-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

#20: $\left[\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{\left(\frac{11}{4}-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)}\right]$

▲ **Figura 4** I dati per il grafico.

Il grafico

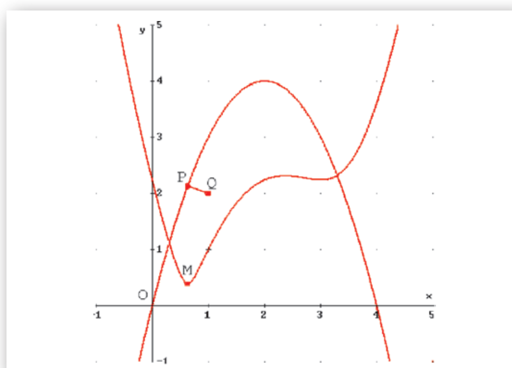
• Per costruire il grafico richiesto aggiungiamo, nella zona algebrica, l'etichetta #19 (figura 4), con le coordinate degli estremi del segmento *PQ*, e l'etichetta #20, con le coordinate di *M* (l'ascissa di *M* è quella di *P* e l'ordinata è nella #12).

• Passiamo poi alcune volte dall'ambiente algebrico all'ambiente grafico a due dimensioni e viceversa, rispettivamente con i bottoni *Finestra_Grafici2D* e *Finestra Algebra*. Nell'ambiente algebrico evidenziamo, una alla volta, l'equazione della parabola in #1, l'equazione della distanza in #4, le coordinate degli estremi del segmento *QP* in #19, le coordinate del punto di minimo assoluto *M* in #20. Nell'ambiente grafico usiamo il bottone *Traccia il grafico* (figura 5).

• Inseriamo nel disegno i nomi dei punti con *Inserisci_Annotazione*.

• Scegliamo la zona del piano cartesiano più interessante da rappresentare sullo schermo: diamo *Imposta_Intervallo del grafico* e, nella tendina, selezioniamo *Minimo/massimo*. Nella finestra di dialogo scriviamo − 1, 5 e 6 nei campi *Minimo*, *Massimo* e *Intervalli* per l'asse *x* e gli stessi valori nei campi per l'asse *y*.

• Rendiamo monometrico il sistema cartesiano con il comando *Imposta_Rapporto d'aspetto* seguito da *Resetta*.



▲ **Figura 5** I grafici della parabola con la posizione del punto *P* più vicino a *Q* e di *d*(*x*) con il minimo assoluto *M*.

Esercitazioni

Analizza i seguenti problemi e risolvili con Derive. Per verificare la soluzione, costruisci un grafico con i punti e le curve in essi coinvolti.

1 Determina k in modo che la funzione $f(x) = 2x^3 + kx^2 + 8x - 1$ ammetta un estremante di ascissa 4. $[-13]$

2 Trova h e k in modo che la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + hx + 5}{x^2 + 4x + k}$ abbia un punto di massimo in $M(-2; -1)$. $[4, 3]$

3 Determina h in modo che la funzione $f(x) = \dfrac{hx}{(x-1)^2}$ ammetta un estremante di ordinata 1. $[-4]$

4 Trova a, b e c in modo che la funzione $f(x) = ax^2 + b + \dfrac{c}{x}$ passi per $P(-2; 6)$ e abbia un estremante in $M(-1; 4)$. $[1, 1, -2]$

5 Determina h e k in modo che la funzione $f(x) = (x-h)(x-k)e^{-x}$ abbia due estremanti rispettivamente nei punti di ascissa 1 e 3. $[1, 1]$

6 Le parabole di equazioni $y = -x^2 + 4$ e $y = x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$ si intersecano rispettivamente nei punti A e B e incontrano la retta di equazione $x = k$ nei punti C e D. Supponendo che la retta vari all'interno di AB, determina k in modo che sia massima l'area del triangolo OCD, dove O è l'origine degli assi. $\left[-\dfrac{3+\sqrt{93}}{12}\right]$

7 La retta di equazione $y = x + h$ incontra la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ in A e in B e l'asse y in C. Il punto D ha coordinate $(0; 1)$. Trova h in modo che il prodotto $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$ sia massimo. $\left[\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\right]$

8 Detti A e B (A quello di ascissa minore) i punti di intersezione della retta di equazione $y = k$ con la parabola di equazione $y = -x^2 + 3x - 2$ e C e D (D quello di ascissa maggiore) quelli con la parabola $y = x^2 - 4$, trova k in modo che la corda AD abbia lunghezza massima. $\left[-\dfrac{15}{8}\right]$

9 La parabola di equazione $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x$ incontra l'asse x nell'origine O e in A. Determina le coordinate del punto P, appartenente all'arco OA della parabola, che abbia distanza massima da O. $[P(6-\sqrt{2}; 2\sqrt{2}+5)]$

10 La parabola di equazione $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x + 10$ incontra l'asse x in A e in B e l'asse y in C. Determina un punto P sull'arco AB della parabola in modo che, detta H la proiezione di P sull'asse x, il trapezio $OCPH$ abbia la superficie massima, con O origine degli assi. $\left[P\left(\dfrac{8+2\sqrt{46}}{3}; \dfrac{62+8\sqrt{46}}{9}\right)\right]$

11 Le curve di equazioni $y = -x^3 + 4x$ e $y = \dfrac{3}{x}$ si intersecano nei punti A e B del terzo quadrante e nei punti C e D del primo. Considera una retta parallela all'asse y, $x = h$, che varia tra C e D e incontra le due curve rispettivamente nei punti E e F. Determina h in modo che il segmento EF abbia lunghezza massima. $\left[\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{13}}{3}}\right]$