

LABORATORIO DI MATEMATICA

LE EQUAZIONI IRRAZIONALI CON DERIVE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Derive discutiamo il numero delle soluzioni reali che può avere la seguente equazione irrazionale

$$\sqrt{x+h} = 2x+2$$

al variare del parametro h .

Le soluzioni dell'equazione in funzione di h

- Entriamo in ambiente Derive, diamo *Crea_Espressione* e digitiamo nella riga di editazione delle espressioni l'equazione $\text{SQRT}(x+h) = 2 \cdot x + 2$. Con OK la inseriamo nell'etichetta #1 della zona algebrica (figura 1).
- Derive non risolve l'equazione irrazionale non conoscendo i valori del parametro h . Battiamo, allora, il tasto F4 importando l'equazione dalla zona algebrica alla riga di editazione delle espressioni fra parentesi. A fianco scriviamo $\wedge 2$, per elevare al quadrato entrambi i membri dell'equazione ed eliminare la radice.
- Con OK la inseriamo nella #2.
- Usiamo *Risolvi_Espressione*, nella cui finestra di dialogo confermiamo l'equazione e usciamo con *Semplifica*, ottenendo nella #3 l'impostazione e nella #4 le soluzioni dell'equazione in funzione di h . Adesso verifichiamo se quelle trovate sono soluzioni accettabili dell'equazione originale.

#1: $\sqrt{(x+h)} = 2 \cdot x + 2$

#2: $(\sqrt{(x+h)} = 2 \cdot x + 2)^2$

#3: $\text{SOLVE}((\sqrt{(x+h)} = 2 \cdot x + 2)^2, x)$

#4: $x = \frac{\sqrt{(16 \cdot h - 15)} - 7}{8} \vee x = -\frac{\sqrt{(16 \cdot h - 15)} + 7}{8}$

◀ Figura 1

Le condizioni di esistenza delle soluzioni

Imponiamo le condizioni affinché l'equazione sia soddisfatta. Nel nostro caso sono: la condizione di esistenza del radicale, ovvero poniamo il radicando maggiore o uguale a 0, e la condizione che il secondo membro dell'equazione sia maggiore o uguale a 0.

- Dopo averlo evidenziato con dei clic successivi sull'equazione contenuta nella #1, importiamo nella riga di editazione il radicando $x+h$, a fianco battiamo ≥ 0 , imponendo la condizione di esistenza del radicale, e lo inseriamo nella #5 (figura 2).
- Con *Risolvi_Espressione* ricaviamo nella #6 l'impostazione e nella #7 la soluzione della disequazione.
- Analogamente, operiamo per stabilire quando il secondo membro dell'equazione è positivo, come vediamo nella #8, nella #9 e nella #10.

#5: $x + h \geq 0$

#6: $\text{SOLVE}(x + h \geq 0, x)$

#7: $x \geq -h$

#8: $2 \cdot x + 2 \geq 0$

#9: $\text{SOLVE}(2 \cdot x + 2 \geq 0, x)$

#10: $x \geq -1$

◀ Figura 2

Gli intervalli di h

- Imponiamo le condizioni di esistenza alla prima soluzione dell'equazione nella #11 (figura 3). Devono essere entrambe soddisfatte, quindi usiamo la congiunzione logica per legare le due condizioni. Prendiamo il simbolo della congiunzione dalla tabella dei simboli matematici con un clic.
- Diamo *Risolvi_Espressione* ottenendo nella #13 l'intervallo dei valori del parametro h che rendono accettabile la prima soluzione.
- Operiamo similmente per il secondo radicale, trovando nella #16 i suoi intervalli di accettabilità.

$$\begin{aligned} \#11: & \frac{\sqrt{(16 \cdot h - 15) - 7}}{8} \geq -h \wedge \frac{\sqrt{(16 \cdot h - 15) - 7}}{8} \geq -1 \\ \#12: & \text{SOLVE} \left(\frac{\sqrt{(16 \cdot h - 15) - 7}}{8} \geq -h \wedge \frac{\sqrt{(16 \cdot h - 15) - 7}}{8} \geq -1, h \right) \\ \#13: & h \geq \frac{15}{16} \\ \#14: & -\frac{\sqrt{(16 \cdot h - 15) + 7}}{8} \geq -h \wedge -\frac{\sqrt{(16 \cdot h - 15) + 7}}{8} \geq -1 \\ \#15: & \text{SOLVE} \left(-\frac{\sqrt{(16 \cdot h - 15) + 7}}{8} \geq -h \wedge -\frac{\sqrt{(16 \cdot h - 15) + 7}}{8} \geq -1, h \right) \\ \#16: & \frac{15}{16} \leq h \leq 1 \end{aligned}$$

◀ Figura 3

La tabella dei risultati

- Diamo *Inserisci_testo* e nell'area vuota che il sistema ci presenta scriviamo il riassunto dei risultati trovati (figura 4).

$h < 15/16$:	nessuna soluzione
$h = 15/16$:	due soluzioni coincidenti
$15/16 < h \leq 1$:	due soluzioni distinte
$h > 1$:	una soluzione

◀ Figura 4

Una verifica

- Svolgiamo una verifica usando l'istruzione VECTOR (figura 5). Facciamo assumere al parametro h dei valori presi all'interno dei vari intervalli evidenziati dalla discussione e facciamo risolvere a Derive le varie equazioni irrazionali corrispondenti.
- Diamo *Semplifica_Base* sull'istruzione VECTOR e nella #18 appaiono le risposte.

$$\begin{aligned} \#17: & \text{VECTOR} \left([h, \text{SOLVE}(\sqrt{(x+h)} = 2 \cdot x + 2, x)], h, \left[-1, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, 1, 3 \right] \right) \\ \#18: & \left[\begin{array}{l} -1 \quad x = -\frac{7}{8} - \frac{\sqrt{31 \cdot i}}{8} \vee x = -\frac{7}{8} + \frac{\sqrt{31 \cdot i}}{8} \\ \frac{15}{16} \quad x = -\frac{7}{8} \\ \frac{31}{32} \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{16} - \frac{7}{8} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{16} - \frac{7}{8} \\ 1 \quad x = -\frac{3}{4} \vee x = -1 \\ 3 \quad x = \frac{\sqrt{33}}{8} - \frac{7}{8} \end{array} \right] \end{aligned}$$

◀ Figura 5

Esercitazioni

Le equazioni irrazionali con parametro

Con l'aiuto di Derive discuti il numero delle soluzioni reali che possono avere le seguenti equazioni irrazionali al variare del parametro k .

1 $\sqrt{x-1} = h - x$ [$h \geq 1$: una sol.; $h < 1$: nessuna sol.]

2 $\sqrt{hx - x^2} = x$ [$h < 0$: una sol.; $h = 0$: una sol. doppia; $h > 0$: due sol.]

3 $\sqrt{1+x^2} = -\frac{4x+h}{5}$ [$h < -3$: due sol.; $h = -3$: una sol. doppia; una; $h > -3$: nessuna sol.]

4 $\sqrt{1-3x} = x - h$ [$h \leq \frac{1}{3}$: una sol.; $h > \frac{1}{3}$: nessuna sol.]

5 $\sqrt{hx+4} = x - 1$ [$h \geq 4$: una sol.; $h < 4$: nessuna sol.]

Le disequazioni lineari

Risolvi le seguenti disequazioni lineari con l'aiuto di Derive, svolgendo i vari passi, e infine controlla il risultato con il comando *Risolvi_Espressione*.

6 $10x + 8 < 7x - 24$ [$x < -\frac{32}{3}$]

7 $25x - 32 \geq 40x - 62$ [$x \leq 2$]

8 $\frac{4}{5}x - \frac{2}{3} > \frac{2}{3}x - \frac{6}{25}$ [$x > \frac{16}{5}$]

9 $\frac{5}{4}x - 2 > 2x - \frac{2}{5}$ [$x < -\frac{32}{15}$]

10 $\frac{7}{5}x + \frac{25}{9} < \frac{1}{2}x - \frac{7}{15} + \frac{19}{10}x$ [$x > \frac{146}{45}$]

11 $\frac{28}{27}x - \frac{7}{12} \leq \frac{5}{24}x - \frac{35}{72}$ [$x \leq \frac{21}{179}$]

12 $\frac{4}{405}x - \frac{7}{234} > \frac{2}{543}x - \frac{1}{825}$ [$x > \frac{3008763}{649220}$]

13 $\frac{354}{4}x - \frac{2048}{9} > \frac{2500}{3}x - \frac{653}{6}$ [$x < -\frac{2137}{13407}$]

Le disequazioni irrazionali

Risolvi con l'aiuto del Derive le seguenti disequazioni irrazionali. Osserva che:

- se una disequazione non ammette soluzioni, Derive dà in risposta *false* (falso);
- se una disequazione ammette come soluzione l'insieme dei numeri reali, Derive dà in risposta *true* (vero).

14 $\sqrt{x^2 - 3x + 2} < 2x + 5$ [$\frac{\sqrt{253}}{6} - \frac{23}{6} < x \leq 1 \vee x \geq 2$]

15 $\sqrt{-x^2 + 9} < \frac{11 - 2x}{4}$ [$-3 \leq x < \frac{11}{10} - \frac{\sqrt{59}}{5} \vee \frac{\sqrt{59}}{5} + \frac{11}{10} < x \leq 3$]

16 $\sqrt{x+4} < \frac{1}{5}(x-5) + 3$ [$-4 \leq x < 0 \vee x > 5$]

17 $\sqrt{8x^2 - 16x - 48} > x + 5$ [$x < \frac{13}{7} - \frac{2\sqrt{170}}{7} \vee x > \frac{13}{7} + \frac{2\sqrt{170}}{7}$]

- 18** $\sqrt{x^2 + 9} < \frac{x+6}{2}$ $[0 < x < 4]$
- 19** $\sqrt{x^2 - 3} > 2x - 2$ $[x \leq -\sqrt{3}]$
- 20** $\sqrt{x^2 + 6x} > 4$ $[x < -8 \vee x > 2]$
- 21** $\sqrt{5x^2 + 125} < \frac{1}{2}x - 2$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$
- 22** $\sqrt{-x^2 + 4} > 2x + 2$ $[-2 \leq x < 0]$
- 23** $2\sqrt{x^2 - 5x + 4} < 2x - 3$ $[x \geq 4]$
- 24** $2\sqrt{3 - 2x - x^2} > x + 3$ $[-3 < x < \frac{1}{5}]$
- 25** $2\sqrt{4 + 2x + x^2} > \frac{2}{5}x - 3$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$
- 26** $\sqrt{4 + x^2} < -\frac{3x+5}{4}$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$
- 27** $\sqrt{-x^2 - 20x} < 6$ $[-20 \leq x < -18 \vee -2 < x \leq 0]$
- 28** $\sqrt{-4x^2 + 9} > \frac{11-2x}{4}$ $[\frac{11-16\sqrt{2}}{34} < x < \frac{11+16\sqrt{2}}{34}]$
- 29** $\sqrt{4x^2 - 9} > \frac{4-x}{2}$ $[x < -\frac{2\sqrt{199}}{15} - \frac{4}{15} \simeq -2,14756 \vee x > \frac{2\sqrt{199}}{15} - \frac{4}{15} \simeq 1,161423]$
- 30** $\sqrt{3x^2 + x} > 2x - 3$ $[x \leq -\frac{1}{3} \vee 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{133}}{2} + \frac{13}{2}]$
- 31** $\sqrt{x+4} < x-2$ $[x > 5]$
- 32** $\sqrt{-2 + 2x - x^2} < 3x - 3$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$
- 33** $\sqrt{x^2 - 1} < x^2 - 4$ $[x < -\sqrt{\frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{9}{2}} \simeq -2,51053 \vee x > \sqrt{\frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{9}{2}} \simeq 2,51053]$