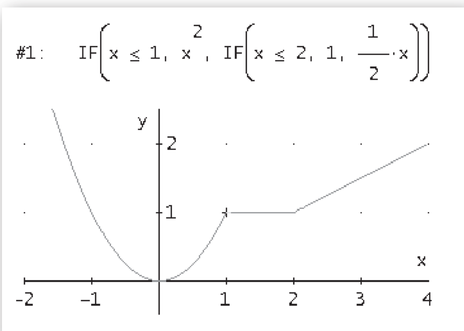
LABORATORIO DI MATEMATICA
L'ELLISSE CON DERIVE

La funzione IF
La funzione IF ha la sintassi: IF(*cond* , *expr1*, *expr2*). Se *cond* risulta vera, Derive esegue *expr1*, se falsa esegue *expr2*. Nel primo campo può esserci una condizione singola oppure una combinazione di condizioni legate dai connettivi logici OR, AND, NOT, XOR. *expr1* ed *expr2* possono essere altre istruzioni IF (IF annidati).

ESERCITAZIONE GUIDATA

Tracciamo il grafico della funzione definita per casi $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x & \text{se } x > 2 \end{cases}$

- Diamo *Crea_Espressione*, nella riga di editazione digitiamo la funzione di Derive IF(x ≤ 1, x^2, IF(x ≤ 2, 1, 1/2x)) e la immettiamo nella #1 (figura 1).
- Entriamo in grafica con il bottone *Finestra_Grafica 2D*.



- Facciamo clic sul bottone *Traccia il grafico* e otteniamo il grafico di $f(x)$.
- Usiamo il comando *Modifica_Copia Regione* per copiare il grafico della funzione negli *Appunti*.
- Ritorniamo nell'ambiente algebrico con il bottone *Finestra_Algebra*.
- Facciamo clic sul bottone *Incolla* per immettere il grafico nella zona algebrica sotto l'etichetta #1.

◀ **Figura 1** Il grafico della $f(x)$ riportato nella zona algebrica.

Le funzioni definite dall'utente
Con Derive possiamo costruire delle funzioni utili per la soluzione dei nostri problemi.
Per definire una funzione scriviamo nell'ordine *il nome della funzione*, *le variabili fra parentesi tonde*, *il simbolo di assegnazione* e *l'espressione che rappresenta la funzione* e per renderla nota a Derive la immettiamo con INVIO nella zona algebrica. Per esempio, R(x) : = 2*x + 2 può essere il modo di definire la funzione $y = 2x + 2$.
Per far operare una funzione, digitiamo il suo nome seguito fra parentesi dai dati, che devono sostituire le variabili (quindi i dati devono essere coerenti nell'ordine e nel numero con le variabili scritte nella definizione della funzione), lo immettiamo nella zona algebrica e, su di esso, diamo uno dei comandi *Semplifica* o *Base* o *Sviluppa* o *Approssima*.
Per esempio, se con la funzione R già definita diamo $R(-3)$, otteniamo -4.

ESERCITAZIONE GUIDATA

Costruiamo una tabella con le coordinate di cinque punti della retta di equazione $y = 2x + 2$, le cui ascisse variano da -1 a 3, con passo 1.

- Definiamo la funzione R, digitando nella riga di editazione R(x) : = 2*x + 2 e inserendola nella #1 con INVIO (figura 2 nella pagina seguente).

▶▶

D'ora in avanti Derive, quando deve semplificare o sviluppare o approssimare l'espressione $R(a)$, restituisce un'espressione nella quale a x sostituisce a. Per esempio, con $R(-3)$ otteniamo -4.

```
#1:   R(x) := 2·x + 2
#2:   VECTOR([x, R(x)], x, -1, 3, 1)
```

$$\#3: \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

▶ **Figura 2** La definizione di una funzione $R(x)$ e una sua applicazione.

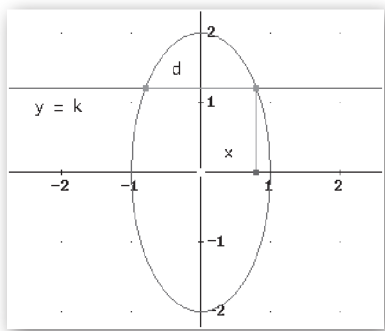
- Facciamo operare la nostra funzione $R(x)$ all'interno della funzione di Derive VECTOR: nella riga di editazione scriviamo VECTOR([x, R(x)], x, −1, 3, 1) e la immettiamo nell'etichetta #2. Abbiamo usato le parentesi quadre, in modo che in ogni riga della tabella appaiano il valore di x e il corrispondente valore di R.
- Per ricavare la tabella, applichiamo alla #3 il comando *Semplifica_Sviluppa*, indicando a Derive di far operare la funzione VECTOR e, al suo interno, la R.

ESERCITAZIONE GUIDATA

Costruisci una funzione di Derive che, dato un valore $d \geq 0$, determini l'equazione della retta $y = k$ che, data l'ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, intercetta sulla semiellisse che sta al di sopra dell'asse x una corda lunga d.
Prova la funzione con i valori $d = -1, 0, 1, 2$.

L'analisi del problema

Otteniamo l'equazione della semiellisse che sta al di sopra dell'asse x esplicitando la y dall'equazione della ellisse.
Deduciamo dalla figura 3 che l'equazione della retta parallela all'asse y, che stacca sull'ellisse una corda di lunghezza d, si ricava sostituendo a x nell'equazione trovata l'espressione $\frac{d}{2}$.



▶ **Figura 3** L'ellisse e la corda che la retta stacca su di essa.

La sessione di lavoro

- Diamo *Crea_Espressione*, digitiamo nella riga di editazione l'equazione dell'ellisse x^2 + y^2/4 = 1 e la immettiamo nell'etichetta #1 (figura 4).

$$\#1: \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\#2: \quad \text{SOLVE}\left(x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\ y\right)$$

$$\#3: \quad y = -2\cdot\sqrt{(1 - x^2)} \vee y = 2\cdot\sqrt{(1 - x^2)}$$

$$\#4: \quad y = 2\cdot\sqrt{(1 - x^2)}$$

$$\#5: \quad y = 2\cdot\sqrt{\left(1 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)}$$

$$\#6: \quad y = \sqrt{(4 - d^2)}$$

▶ **Figura 4** L'equazione della retta in funzione della lunghezza della corda.

- Applichiamo sulla #1 il comando *Risolvi_Espressione*, indichiamo a Derive, attraverso la finestra di dialogo, di considerare come variabile la y.
- Usciamo dalla finestra di dialogo con OK, preparando nella #2 la funzione per esplicitare la y.
- Diamo *Semplifica_Base*, Derive esplicita y e mostra il risultato nella #3.
- Facciamo clic sulla #3, sull'equazione della semiellisse superiore, sulla riga di editazione delle espressioni e battiamo F3, importando l'equazione. Diamo INVIO, immettendola nella #4.
- Usiamo *Semplifica_Sostituisci variabili*, nella finestra di dialogo sostituiarno $d/2$ a x e usciamo con un clic su *Semplifica*, ricavando nella #6 l'equazione richiesta dal problema.
- Definiamo la funzione tenendo conto che la retta esiste se vengono assegnati dei valori di d compresi fra 0 e 2 e che l'equazione della retta in funzione della lunghezza d si trova nella #6. Nella riga di editazione, pertanto, scriviamo Ret_Cor(d): = If(d < 0 ∨ d > 2, "La retta non esiste", y = SQRT(4 − d^2)) e la immettiamo nella #7 (figura 5).
- Nella riga di editazione scriviamo Ret_Cor(−1) e battiamo INVIO.
- Sulla #8 usiamo *Semplifica_Base* e leggiamo la risposta nella #9.
- Operiamo similmente per gli altri casi richiesti dal problema e leggiamo le risposte nella #11, nella #13 e nella #15.

```
        Ret_Cor(d) :=
          If d < 0 ∨ d > 2
#7:          "La retta non esiste"
             y = √(4 - d^2)

#8:     Ret_Cor(-1)

#9:     La retta non esiste

#10:    Ret_Cor(0)

#11:    y = 2

#12:    Ret_Cor(1)

#13:    y = √3

#14:    Ret_Cor(2)

#15:    y = 0 ∨ y = 0
```

▲ **Figura 5** La funzione per trovare l'equazione della retta e le sue applicazioni.

Esercitazioni

Usa Derive per risolvere i seguenti problemi. A verifica della soluzione di ognuno di essi realizza e salva un grafico, rappresentando in un sistema cartesiano monometrico tutti i dati e i risultati parziali e finali corredati da etichette.

1 Determina l'equazione di un'ellisse avente un vertice in $V\left(\frac{5}{4};0\right)$ e tangente alla retta di equazione $y = \frac{16}{5}x - 5$. $\left[\frac{16}{25}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1\right]$

2 Trova l'equazione della tangente all'ellisse di equazione $\frac{16}{25}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$ nel suo punto di ascissa 1, appartenente al IV quadrante. $\left[y = \frac{16}{5}x - 5\right]$

3 Dati:

- la retta r, passante per i punti $M(-3; 1)$ e $N(2; 6)$,
- la parabola p di equazione $y = x^2 - 2x$ che incontra r nei punti A e B,
- l'ellisse e passante per i punti $H\left(\frac{6}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ e $K\left(-\frac{8}{3}; \frac{3}{5}\right)$,
- il punto C che si trova nel I quadrante, appartiene alla retta t, tangente in H alla e e tale che l'area del triangolo ABC vale $\frac{45}{2}$,
- Q, punto medio del segmento PK, di ascissa $-\frac{1}{3}$,

determina le coordinate del punto P che appartiene alla retta CV_2, dove V_2 è il vertice di e che si trova sul semiasse negativo delle x.

$\left[P\left(2; \frac{1}{2}\right)\right]$

In ognuno dei seguenti problemi, costruisci in Derive la funzione utente indicata e poi utilizzala nella risoluzione.

4 Determina l'equazione dell'ellisse tangente alla retta t di equazione $2x + y - 5 = 0$ nel punto T, dove incontra la retta passante per $M(2; 5)$ e $N(-1; -1)$.
Funzione utente con, in ingresso, le coordinate di due punti dati e, in uscita, l'equazione della retta passante per i due punti.
$\left[\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{15}y^2 = 1\right]$

5 Determina le equazioni delle ellissi passanti per A, punto d'incontro delle rette r, di equazione $25x + 5y - 31 = 0$, e s, di equazione $5x + 5y + 1 = 0$, e aventi l'area $S = 6\pi$.
Funzione utente con, in ingresso, i coefficienti delle equazioni di due rette e, in uscita, le coordinate del loro punto d'incontro.
$\left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1 \text{ e } \frac{9}{64}x^2 + \frac{16}{81}y^2 = 1\right]$

6 Determina l'area del triangolo ABC rettangolo in A (punto del II quadrante), inscritto nell'ellisse di equazione $\frac{1}{7}x^2 + \frac{3}{7}y^2 = 1$, sapendo che la retta su cui giace il cateto AB ha equazione $x + 5y - 7 = 0$.
Funzione utente con, in ingresso, le coordinate di tre punti e, in uscita, l'area del triangolo avente i vertici nei tre punti.
$\left[S = \frac{143}{38}\right]$

7 Data l'ellisse E di equazione $\frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{5}y^2 = 1$, calcola il perimetro (esprimendo la misura con quattro cifre decimali) del triangolo ABT, dove A e B sono le intersezioni fra E e la retta r di equazione $15x - 14y = 0$ e T è il punto d'incontro di tangenza con la retta t di equazione $5x + 3y - 5 = 0$.
Funzione utente con, in ingresso, le coordinate di due punti e, in uscita, la misura del segmento con estremi i due punti.
$[2p \simeq 3{,}9382]$