LABORATORIO DI MATEMATICA
L'IPERBOLE CON DERIVE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Scriviamo un programma nel linguaggio di Derive che, lette le coordinate di due punti M e N, controlli se esiste la curva di equazione $hx^2 + ky^2 = 1$ passante per essi e, in caso affermativo, indichi se si tratta di un'iperbole, di un'ellisse o di una circonferenza e ne mostri l'equazione.
Proviamo il programma con:

a) $M\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$ e $N(2; -\sqrt{3})$; b) $M\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $N\left(\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right)$; c) $M(4; 3)$ e $N(-3; 4)$.

L'analisi del problema

Imponendo alla curva di equazione $hx^2 + ky^2 = 1$ la condizione di passaggio per i due punti $M(x_M; y_M)$ e $N(x_N; y_N)$, ricaviamo il seguente sistema lineare nelle incognite h e k:

$$h \text{ e } k: \begin{cases} x_M^2 h + y_M^2 k = 1 \\ x_N^2 h + y_N^2 k = 1 \end{cases}$$

Calcoliamo i determinanti necessari per applicare il metodo di Cramer:

$$d = \begin{vmatrix} x_M^2 & y_M^2 \\ x_N^2 & y_N^2 \end{vmatrix} = x_M^2 y_N^2 - x_N^2 y_M^2,\ d_h = \begin{vmatrix} 1 & y_M^2 \\ 1 & y_N^2 \end{vmatrix} = y_N^2 - y_M^2,\ d_k = \begin{vmatrix} x_M^2 & 1 \\ x_N^2 & 1 \end{vmatrix} = x_M^2 - x_N^2.$$

Discutiamo la soluzione del sistema:
- se $d = 0$, il sistema non è determinato, le curve possono o non esistere o essere infinite;
- se $d_h = 0$ o $d_k = 0$, l'equazione non rappresenta una curva;
- se $d \neq 0$, i coefficienti dell'equazione risultano essere $h = \frac{d_h}{d}$ e $k = \frac{d_k}{d}$;

– se $h > 0$ e $k > 0$ e se $h = k$, l'equazione rappresenta una circonferenza;
– se $h > 0$ e $k > 0$ e se $h \neq k$, l'equazione rappresenta un'ellisse;
– se ($h < 0$ e $k > 0$) o se ($h > 0$ e $k < 0$), l'equazione rappresenta un'iperbole.

I coefficienti h e k non possono risultare entrambi negativi, altrimenti l'equazione non potrebbe avere come soluzione una coppia di numeri reali. Per esempio, non può essere $h = -1$ e $k = -1$, che darebbe l'equazione $-x^2 - y^2 = 1$.

L'algoritmo

Inizio,
Leggi x_M, y_M, x_N, y_N,
Calcola d, Calcola d_h, Calcola d_k,
Se $d = 0$ o $d_h = 0$ o $d_k = 0$,
  allora Scrivi I due punti non individuano una curva, Fine.
Calcola h e k,
Se $h > 0$ e $k > 0$,
    allora se $h = k$,
        allora Scrivi [Circonferenza; x² + y² = 1/h], Fine.
        altrimenti Scrivi [Ellisse; h x² + k y² = 1], Fine.
    altrimenti Scrivi [Iperbole; h x² + k y² = 1], Fine.

Il programma

- Scriviamo nella linea di editazione: Curva_2P(xm, ym, xn, yn) : = PROG(d : = xm^2 · yn^2 − xn^2 · ym^2, dh : = yn^2 − ym^2, dk : = xm^2 − xn^2, IF(d = 0 ∨ dh = 0 ∨ dk = 0, RETURN "I due punti non individuano una curva"), h : = dh/d, k : = dk/d, IF(h > 0 ∧ k > 0, IF (h = k, RETURN ["Circonferenza"; x^2 + y^2 = 1/h], RETURN ["Ellisse"; h · x^2 + k · y^2 = 1]), RETURN ["Iperbole"; h · x^2 + k · y^2 = 1])).
- Battiamo INVIO per inserire il programma nella #1 (figura 1).

```
      Curva_2P(xm, ym, xn, yn) :=
        Prog
          d := xm^2·yn^2 - xn^2·ym^2
          dh := yn^2 - ym^2
          dk := xm^2 - xn^2
          If d = 0 ∨ dh = 0 ∨ dk = 0
             RETURN "I due punti non individuano una curva"
#1:       h := dh/d
          k := dk/d
          If h > 0 ∧ k > 0
             If h = k
                RETURN ["Circonferenza"; x^2 + y^2 = 1/h]
                RETURN ["Ellisse"; h·x^2 + k·y^2 = 1]
             RETURN ["Iperbole"; h·x^2 + k·y^2 = 1]
```

◀ **Figura 1** **Il programma per determinare l'equazione $hx^2 + ky^2 = 1$ di una curva passante per due punti dati.**

Alcune esecuzioni del programma

- Nella riga di editazione scriviamo Curva_2P (5/3, 4/3, 2, − SQRT(3)), usando le coordinate dei due punti corrispondenti al primo caso proposto dal problema.
- Con INVIO ricaviamo la #2 (figura 2).
- Su di essa diamo *Semplifica_Base*, ottenendo la risposta nella #3.
- In modo analogo otteniamo i risultati per gli altri due casi proposti.

#2: $\text{Curva\_2P}\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 2, -\sqrt{3}\right)$

#3: $\begin{bmatrix} \text{Iperbole} \\ x^2 - y^2 = 1 \end{bmatrix}$

#4: $\text{Curva\_2P}\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$

#5: $\begin{bmatrix} \text{Ellisse} \\ x^2 + 4\cdot y^2 = 4 \end{bmatrix}$

#6: Curva_2P(4, 3, −3, 4)

#7: $\begin{bmatrix} \text{Circonferenza} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{bmatrix}$

▶ **Figura 2** **Le esecuzioni del programma.**

Esercitazioni

Usa Derive per risolvere i seguenti problemi. A verifica della soluzione di ognuno di essi realizza e salva un grafico rappresentato in un sistema cartesiano monometrico con tutti i dati e i risultati parziali e finali corredati da etichette.

1 Trova l'equazione di un'iperbole equilatera riferita agli asintoti, sapendo che, intersecando la retta di equazione $y = -x + 3$, forma una corda lunga $3\sqrt{2}$. [$xy = 4$]

2 Trova l'equazione di un'iperbole riferita agli assi, sapendo che ha un vertice nel punto $V_1(3; 0)$, che passa per il punto P di ascissa $\frac{4}{5}$ e che l'area del triangolo V_1V_2P, dove V_2 è l'altro vertice dell'iperbole, vale 8. $\left[\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{4}y^2 = 1\right]$

3 Scrivi in Derive una funzione definita dall'utente che legga i valori dei parametri k e r e dia in uscita le coordinate delle eventuali intersezioni fra l'iperbole $xy = k$ e la circonferenza avente come centro l'origine e di raggio r.
Prova la funzione nei seguenti casi e controlla graficamente i risultati.

a) $k = 1$ e $r = 1$;
b) $k = 1$ e $r = \sqrt{2}$;
c) $k = 1$ e $r = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

$\left[\text{a) nessuna; b) } (-1; 1) \text{ e } (1; 1)\text{; c) } \left(-2; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; -2\right), \left(\frac{1}{2}; 2\right) \text{ e } \left(2; \frac{1}{2}\right)\right]$

4 Scrivi in Derive una funzione definita dall'utente che legga rispettivamente i coefficienti di una conica, la cui equazione è del tipo $hx^2 + ky^2 = 1$, e quelli di una retta con equazione in forma implicita e dia in uscita le coordinate degli eventuali punti di intersezione.
Applicala ai seguenti casi e, per verifica, traccia un grafico evidenziando i dati e i risultati.

a) $h = 1$, $k = -1$, $a = 1$, $b = 1$ e $c = -1$;
b) $h = 1$, $k = -1$, $a = 5$, $b = 0$ e $c = -13$;
c) $h = \frac{9}{25}$, $k = \frac{9}{16}$, $a = 6$, $b = 3$ e $c = 10$;
d) $h = \frac{9}{100}$, $k = \frac{25}{81}$, $a = 1$, $b = 2$ e $c = -10$;
e) $h = -\frac{9}{100}$, $k = \frac{25}{81}$, $a = 162$, $b = -325$ e $c = 225$.

$\left[\text{a) } (1; 0)\text{; b) } \left(\frac{13}{5}; -\frac{24}{5}\right), \left(\frac{13}{5}; \frac{24}{5}\right)\text{; c) } \left(-\frac{5}{3}; 0\right), \left(-\frac{35}{29}; -\frac{80}{87}\right)\text{; d) nessun punto; e) } \left(8; \frac{117}{25}\right)\right]$

5 Dato il fascio di rette di equazione $y = (k-1)x - 3k + 4$, scrivi un programma nel linguaggio di Derive che legga un valore del parametro k e indichi se la retta corrispondente stacca sull'iperbole di equazione $-x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ un segmento i cui estremi appartengono al medesimo ramo dell'iperbole e, in caso affermativo, ne dia la lunghezza d. Prova con $k = \frac{1}{3}$, $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ e $k = 4$.

[la retta incontra l'iperbole: nel ramo superiore e $d = 7\frac{\sqrt{13}}{8}$, in nessun punto, nel ramo inferiore e $d = 4\frac{\sqrt{2}}{3}$, in un solo punto (è parallela a un asintoto), in rami diversi]