LABORATORIO DI MATEMATICA
LE EQUAZIONI GONIOMETRICHE CON DERIVE

Le funzioni goniometriche in Derive

La funzione	restituisce
SIN(α)	il seno dell'angolo α
COS(α)	il coseno dell'angolo α
TAN(α)	la tangente dell'angolo α
COT(α)	la cotangente dell'angolo α
DEG	la costante $\frac{\pi}{180}$

La funzione	restituisce
ASIN(*n*)	l'arcoseno di *n*
ACOS(*n*)	l'arcocoseno di *n*
ATAN(*n*)	l'arcotangente di *n*
ACOT(*n*)	l'arcocotangente di *n*
PI	il numero π

I sistemi di misura degli angoli in Derive
Per default Derive considera le misure degli angoli in radianti.
Possiamo utilizzare anche il sistema sessadecimale (la sigla anglosassone è DD, Decimal Degree), nel quale il grado è la 360-esima parte dell'angolo giro e i suoi sottomultipli si misurano nel sistema decimale. Per farlo selezioniamo *Degree* nel campo *Angolo in* della finestra di dialogo di *Opzioni_Modalità Semplificazione*.
La scelta dei gradi sessadecimali, come tutte le opzioni attivate all'interno del comando *Opzioni_Modalità*, rimane attiva sino a diversa indicazione.
Derive non usa il sistema sessagesimale (la sigla anglosassone è DMS, Degree Minute Second), in cui i sottomultipli di grado si misurano in primi e secondi.

ESERCITAZIONE GUIDATA

Troviamo con Derive tutte e sole le soluzioni appartenenti all'intervallo [0; 2π[dell'equazione:

$$2\,\text{sen}\,x + 3\cos x + 2 = 0.$$

Esprimiamo le soluzioni in radianti, in gradi sessadecimali e in gradi sessagesimali.

Le soluzioni dell'equazione
- Entriamo in ambiente Derive, diamo *Crea_Espressione*, scriviamo il testo dell'equazione 2*SIN(x) + 3*COS(x) + 2 = 0 e la inseriamo nell'etichetta #1 (figura 1).
- Diamo *Risolvi_Espressione* e ricaviamo nella #2 l'impostazione e nella #3 la soluzione dell'equazione. Derive dà tre radici nel formato matematico esatto.
- Con *Semplifica_Approssima* otteniamo nella #4 le tre soluzioni dell'equazione mostrate da Derive, approssimate ed espresse in radianti.

#1: $2\cdot\text{SIN}(x) + 3\cdot\text{COS}(x) + 2 = 0$

#2: $\text{SOLVE}(2\cdot\text{SIN}(x) + 3\cdot\text{COS}(x) + 2 = 0,\ x)$

#3: $x = -\ 2\cdot\text{ACOT}\left(-\frac{1}{5}\right) \vee x = 2\cdot\text{ACOT}\left(\frac{1}{5}\right) \vee x = -\frac{\pi}{2}$

#4: $x = -3.536383773 \vee x = -1.570796326 \vee x = 2.746801533$

▲ **Figura 1** Le soluzioni dell'equazione date da Derive.

Le soluzioni richieste
- Per vedere altre soluzioni generiamo tre tabelle, partendo dai valori mostrati da Derive e incrementandoli di 2π, il periodo delle funzioni coinvolte nella nostra equazione.

• Scriviamo l'apposita funzione di Derive per le tabelle VECTOR(− 3.536383773 + 2*k *PI, k, − 1, 3) (importiamo l'angolo con F3 dalla #4, facciamo variare k da − 1 a 3 per ricavare le soluzioni nei pressi del-l'intervallo richiesto) e con OK la inseriamo nella #5 (figura 2).

• Con *Semplifica_Approssima* la facciamo operare. Vediamo nella #6 ($2\pi \simeq 6{,}289$) che vi è una soluzione soddisfacente alla richiesta del problema.

• Inseriamo all'interno della funzione VECTOR la seconda soluzione e sulla #7 diamo *Semplifica_Base*, ottenendo nella #8 le soluzioni nel formato esatto.

• Diamo sulla #9 *Semplifica_Approssima*, ricavando le medesime soluzioni ma approssimate. Vediamo nella #9 che vi è un'altra soluzione accettabile.

• Operiamo similmente per la terza soluzione scoprendo che genera la medesima successione di soluzioni della prima.

• Osservando i risultati, concludiamo che le soluzioni comprese nell'intervallo $[0; 2\pi[$ sono due, che immettiamo nella #12.

```
#5:  VECTOR(-3.536383773 + 2·k·π, k, -1, 3)
#6:  [-9.81956908, -3.536383773, 2.746801534, 9.029986841, 15.31317214]
#7:  VECTOR(- π/2 + 2·k·π, k, -1, 3)
#8:  [- 5·π/2, - π/2, 3·π/2, 7·π/2, 11·π/2]
#9:  [-7.853981633, -1.570796326, 4.71238898, 10.99557428, 17.27875959]
#10: VECTOR(2.746801533 + 2·k·π, k, -1, 3)
#11: [-3.536383774, 2.746801532, 9.02998684, 15.31317214, 21.59635745]
#12: [2.746801534, 3·π/2]
```

▲ **Figura 2** Le soluzioni nell'intervallo $[0; \pi[$.

Da radianti a sessadecimali

• Per passare da radianti al sistema sessadecimale impostiamo nella #13 (figura 3) e nella #15 la divisione delle misure in radianti dei due angoli per DEG, che è la costante $\frac{\pi}{180°}$.

• Con *Semplifica_Approssima* otteniamo le misure dei due angoli nella #14 e nella #16.

```
#13: 2.746801534 / 1°
#14: 157.380135
#15: (3·π/2) / 1°
#16: 270
```

► **Figura 3** Le soluzioni in gradi sessadecimali.

Da sessadecimali a sessagesimali

Gli angoli in sessadecimale e in sessagesimale hanno la stessa parte intera, quindi:

• per i gradi prendiamo la parte intera della misura del primo angolo;

• per i primi moltiplichiamo per 60 la parte decimale della misura del primo angolo e ne prendiamo la parte intera;

• per i secondi moltiplichiamo la parte decimale dei primi per 60, arrotondando l'ultima cifra intera.

Vediamo le operazioni dalla #17 alla #22 (figura 4).

L'ampiezza del secondo angolo coincide nei due sistemi.

```
#17: FLOOR(157.380135)
#18: 157
#19: (157.380135 - FLOOR(157.380135))·60
#20: 22.8081
#21: (22.8081 - FLOOR(22.8081))·60
#22: 48.486
```

▲ **Figura 4** Il passaggio da gradi sessadecimali a gradi sessagesimali.

Le soluzioni richieste sono pertanto le seguenti.

In radianti	In gradi sessadecimali	In gradi sessagesimali
2,746801533	157°,380135	157°22′48″
$\frac{3}{2}\pi \simeq 4{,}71238898$	270°	270°

Esercitazioni

Con l'aiuto di Derive trova le soluzioni, comprese fra 0 e 2π ed espresse in radianti, delle seguenti equazioni goniometriche. Trasformale, poi, in gradi, primi e secondi.

Suggerimento. Se Derive non trova le soluzioni di qualche equazione, opera opportune sostituzioni con formule goniometriche e poi torna a usare il comando *Risolvi_Algebricamente*.

1 $2\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x - 1 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}; x = 90°, x = 210°, x = 330°\right]$

2 $\cos x = \text{tg}\, x$ $[x = 0,666239, x = 2,47535; x = 38°10'22'', x = 141°49'38'']$

3 $\text{tg}\, x + \text{cotg}\, x = 3$ $[x = 0,364863, x = 1,20593, x = 3,50645, x = 4,34752;$ $x = 20°54'19'', x = 69°5'41'', x = 200°54'19'', x = 249°5'41'']$

4 $2\,\text{sen}\, x - 1 = 3 - 2\,\text{tg}\, x$ $[x = 0,886287, x = 4,38524; x = 50°46'50'', x = 251°15'23'']$

5 $-3\,\text{sen}\, x + 3 = 2\cos x$ $\left[x = 0,394791, x = \frac{\pi}{2}; x = 22°37'12'', x = 90°\right]$

6 $\text{sen}\, x + \cos x - \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}; x = 30°, x = 60°\right]$

7 $9 - 4\cos x = -9\,\text{sen}\, x$ $\left[x = \frac{3\pi}{2}, x = 5,54884; x = 270°, x = 317°55'30''\right]$

8 $(2\sqrt{3} - 2)\,\text{sen}\, x + 4\cos^2 x + \sqrt{3} - 4 = 0$
$\left[x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{2\pi}{3}, x = \frac{11\pi}{6}; x = 60°, x = 210°, x = 120°, x = 330°\right]$

9 $4\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\, x \cos x - \cos^2 x = 4$
$\left[x = \frac{\pi}{2}, x = 1,93130, x = \frac{3\pi}{2}, x = 5,09289; x = 90°, x = 111°48'5'', x = 270°, x = 291°48'5''\right]$

10 $\frac{1}{\cos^2 x} + \text{tg}\, x - \text{tg}^2 x = 0$ $\left[x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}; x = 135°, x = 315°\right]$

11 $5\cos^2 x - \text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\, x + 4 = 0$ [impossibile]

12 $\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x - \cos^2 x + 1 = 0$
$\left[x = 0, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \pi, x = 2\pi; x = 0°, x = 30°, x = 150°, x = 180°, x = 360°\right]$

Con l'aiuto di Derive, trova le soluzioni delle seguenti equazioni goniometriche, comprese fra 0° e 360°, espresse in gradi, primi e secondi.
Traccia i grafici della sinusoide contenuta nel primo membro e della retta parallela all'asse *x*, di equazione $y = k$, dove a *k* dai il valore numerico del secondo membro. Ritrova nel grafico le soluzioni determinate analiticamente.

13 $5\,\text{sen}(3x + 24°) = 2$
$[x = 44°8'26'', x = 119°51'34'', x = 164°8'26'', x = 239°51'34'', x = 284°8'26'', x = 359°51'34'']$

14 $2\,\text{sen}(2x - 60°) = 1$ $[x = 45°, x = 105°, x = 225°, x = 285°]$

15 $4\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x + 30°\right) = 3$ $[x = 37°10'51'', x = 202°49'9'']$