LABORATORIO DI MATEMATICA
LE FUNZIONI CONTINUE CON DERIVE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Data la funzione

$$f(x) = \frac{5x^3 - 5x}{2(x^3 - 3x^2 + x + 1)}:$$

- **stabiliamo il dominio,**
- **calcoliamo i limiti ai suoi estremi,**
- **classifichiamo i punti di discontinuità,**
- **determiniamo gli asintoti della funzione.**

Tracciamo, infine, i grafici di $f(x)$ e dei suoi asintoti.

Il dominio

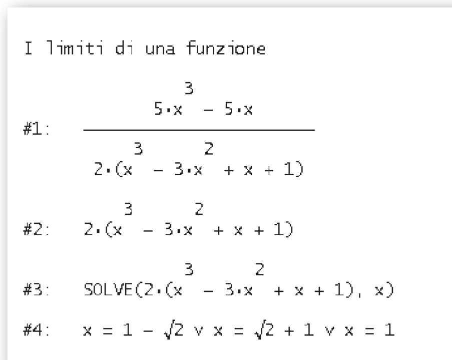
- Usiamo *Inserisci_Testo* per scrivere nel riquadro che appare il titolo del lavoro: I limiti di una funzione (figura 1).
- Rendiamo nota al sistema la funzione digitandone l'espressione nella riga di editazione,

(5*x^ 3 − 5*x) / (2 + (x^3 − 3*x^2 + x + 1)),

e inserendola nella #1 con INVIO.
- Il dominio di $f(x)$, trattandosi di una funzione razionale fratta, è dato da tutti i valori reali di x che non annullano il denominatore. Cerchiamo, quindi, gli zeri del denominatore. Importiamo il denominatore dalla #1 facendo tre clic su di essa e battendo il tasto F4, poi lo inseriamo nella #2 con INVIO.
- Una volta spostato nella #2, applichiamo al denominatore il comando *Risolvi_Espressione*, ottenendo nella #4 i valori di x che lo annullano, da escludere dal dominio.

Il dominio della funzione, pertanto, è:

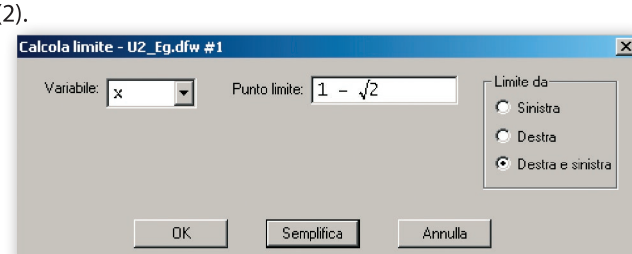
$$x \neq 1 - \sqrt{2} \ \wedge \ x \neq 1 \ \wedge \ x \neq 1 + \sqrt{2}.$$



▲ **Figura 1** Gli zeri del denominatore.

Il comando *Calcola_Limite*

- Calcoliamo i limiti per x tendente ai valori finiti, esclusi dal dominio. Attiviamo il comando *Calcola_Limite*, nella finestra di dialogo (figura 2), confermiamo la variabile indipendente x e nel campo apposito digitiamo il valore al quale tende x: 1 − SQRT(2).



► **Figura 2** La finestra di dialogo *Calcola_Limite*.

Usciamo con *Semplifica* e vediamo nella #5 l'impostazione del limite e nella #6 il risultato (figura 3).
- Operiamo in modo analogo per gli altri limiti e leggiamo i risultati nella #8 e nella #10.
- Calcoliamo, poi, i limiti per x che tende all'infinito. Usiamo *Calcola_Limite* e nel campo del limite di x, importiamo il simbolo ∞ con un clic su di esso nella tabella dei simboli matematici.

Otteniamo i risultati nella #12 e nella #14 (figura 4).

#5: $\lim_{x \to 1-\sqrt{2}} \frac{5 \cdot x^3 - 5 \cdot x}{2 \cdot (x^3 - 3 \cdot x^2 + x + 1)}$

#6: $\pm\infty$

#7: $\lim_{x \to \sqrt{2}+1} \frac{5 \cdot x^3 - 5 \cdot x}{2 \cdot (x^3 - 3 \cdot x^2 + x + 1)}$

#8: $\pm\infty$

#9: $\lim_{x \to 1} \frac{5 \cdot x^3 - 5 \cdot x}{2 \cdot (x^3 - 3 \cdot x^2 + x + 1)}$

#10: $-\frac{5}{2}$

▲ **Figura 3** I limiti della funzione per x che tende ai valori finiti.

#11: $\lim_{x \to -\infty} \frac{5 \cdot x^3 - 5 \cdot x}{2 \cdot (x^3 - 3 \cdot x^2 + x + 1)}$

#12: $\frac{5}{2}$

#13: $\lim_{x \to +\infty} \frac{5 \cdot x^3 - 5 \cdot x}{2 \cdot (x^3 - 3 \cdot x^2 + x + 1)}$

#14: $\frac{5}{2}$

▲ **Figura 4** I limiti della funzione per x che tende all'infinito.

I punti di discontinuità

Alla luce dei risultati ottenuti nel calcolo dei limiti, diciamo che i punti $x = 1 - \sqrt{2}$ e $x = 1 + \sqrt{2}$ sono di discontinuità di seconda specie e che il punto $x = 1$ è di discontinuità di terza specie o eliminabile.

Gli asintoti della funzione

Leggendo sempre i risultati dei limiti, affermiamo che le rette $x = 1 - \sqrt{2}$ e $x = 1 + \sqrt{2}$ sono degli asintoti verticali per la $f(x)$ e la retta $y = \frac{5}{2}$ è l'asintoto orizzontale, che esclude l'esistenza dell'asintoto obliquo.

I grafici di $f(x)$ e dei suoi asintoti

Inseriamo le equazioni degli asintoti e le coordinate del punto di discontinuità di terza specie (figura 5), per poterne tracciare i grafici con gli strumenti di Derive (figura 6).

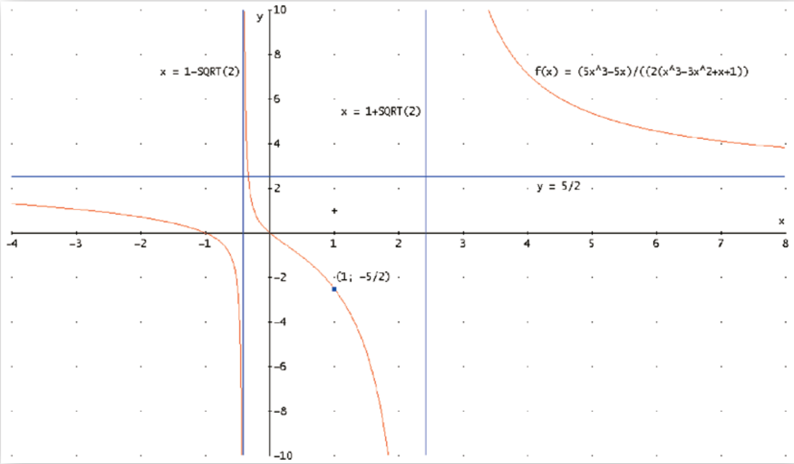
#13: $x = 1 - \sqrt{2}$

#14: $x = 1 + \sqrt{2}$

#15: $\left[1, -\frac{5}{2}\right]$

#16: $y = \frac{5}{2}$

▲ **Figura 5** I dati per il grafico.



▶ **Figura 6** Il grafico.

Esercitazioni

Il calcolo dei limiti delle funzioni

Calcola i seguenti limiti, poi, con Derive, controlla il risultato ottenuto.

1 $\lim_{x \to -\frac{6}{5}} \frac{x^3 - 12}{5x + 6}$ $[\pm\infty]$

2 $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 12}{5x + 6}$ $[+\infty]$

3 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 1}$ $[0]$

4 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\,(x^3 - x^2 - x - 1)}{\sqrt{x^3}\,(x - 2)}$ $[+\infty]$

5 $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$ $[1]$

6 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^3}$ $[+\infty]$

7 $\lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)^3}{(x^3 - 8)^3}$ $\left[\frac{1}{1728}\right]$

8 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 1}$ $[1]$

9 $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 1}$ $[-1]$

10 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^3 - 3x - 1}}{\sqrt[3]{3x^4 \cdot \sqrt{x} + x}}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}\right]$

11 $\lim_{x \to 4} \frac{x^4 - 3x^3 - x^2 - 9x - 12}{x^4 - 4x^3 - x + 4}$ $\left[\frac{95}{63}\right]$

12 $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 2}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x}$ $[-4]$

13 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{3x^3 + 5x^2 - x - 7}}$ $\left[\frac{\sqrt[3]{9}}{3}\right]$

14 $\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{2 - x}}{\sqrt{2} - \sqrt{x}}$ $[+\infty]$

15 $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{3x^3 + 5x^2 - x - 7}}$ $[0]$

16 $\lim_{x \to 2} \frac{-x^2 + x + 2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}}$ $[6\sqrt{2}]$

17 $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - 2}{x + \sqrt{2}}$ $[2\sqrt{2} - 3]$

18 $\lim_{x \to \sqrt[3]{5}} \frac{x - \sqrt[3]{5}}{x^3 - 5}$ $\left[\frac{\sqrt[3]{5}}{15}\right]$

Con l'aiuto di Derive:

a) determina il dominio delle seguenti funzioni;

b) calcola i limiti ai suoi estremi;

c) ricava le equazioni degli eventuali asintoti;

d) traccia il grafico delle funzioni con i rispettivi asintoti.

19 $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 3x}$ [D: $x \neq 0$ e $x \neq 3$; asintoti: $x = 0$, $y = x - 1$]

20 $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$ [D: $x \neq 3$; asintoti: $x = 3$, $y = 0$]

21 $f(x) = \frac{x^3 - 3\sqrt{2}\,x^2 - 8\sqrt{2}}{x^3 - 8}$ [D: $x \neq 2$; asintoti: $x = 2$, $y = 1$]

22 $f(x) = \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 2}$ [D: $x \geq 1$ con $x \neq 2$; asintoti: $x = 2$, $y = 0$, per $x \to +\infty$]

23 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 3}$ [D: $x \neq -3$; asintoti: $x = -3$, $y = -1$, per $x \to -\infty$ e $y = 1$, per $x \to +\infty$]

24 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x - 2 - \sqrt{x + 4}}}$ [D: $x > 5$; asintoti: $x = 5$, per $x \to 5^+$, $y = 1$, per $x \to +\infty$]

Lo studio dei limiti mediante tabelle

Date le seguenti funzioni, costruisci delle tabelle dove compaiono dei valori della x con i corrispondenti valori della funzione. Per farlo, usa l'istruzione VECTOR con *Semplifica_Approssima*. Eventualmente fai aumentare al sistema il numero delle cifre decimali.

Dalle tabelle cerca di comprendere il valore del limite. Calcola poi il limite e confrontalo con i numeri della tabella.

25 $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}$ con x che «si avvicina» a 3 da sinistra.

26 $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{2(x^3 + 2x - 3)}$ con x che «si avvicina» a 1 da destra.

(Suggerimento. Per ottenere il decremento dei valori della x, scrivi l'istruzione VECTOR nel seguente modo: VECTOR ([x, f(x)], x, c + 10*d, c + d, − d), dove a d va sostituito un valore piccolo e positivo.)

27 $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{2(x^3 + 2x - 3)}$ con x che cresce, tendendo a $+\infty$.

28 $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 2x + 1}$ con x che «si avvicina» a -1 da sinistra.

29 $f(x) = \dfrac{x^3 - 8x^2 + 16x}{2(x^3 - 10x - 24)}$ con x che «si avvicina» a 4 da destra e da sinistra.

Il calcolo dei limiti di funzioni con un parametro

Date le seguenti funzioni nella variabile x e contenenti il parametro k, calcola il loro limite, per x tendente a $+\infty$, dopo aver sostituito i valori indicati al parametro k.

30 $f(x) = \dfrac{5x^k}{4x^2 + 4x + 1}$ $k = 1, 2, 3$ $\left[0; \dfrac{5}{4}; +\infty\right]$

31 $f(x) = \dfrac{6x^k + 6}{\sqrt{x^2 - 4}}$ $k = \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}$ $[0; 6; +\infty]$

32 $f(x) = \dfrac{4(x - 1)^3}{x^k}$ $k = 2, 3, 4$ $[+\infty; 4; 0]$

33 $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2x - 1}}{x^k + 1}$ $k = \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}$ $[+\infty; \sqrt[3]{2}; 0]$

34 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^k + 2}}{x^3\sqrt{2x - 4}}$ $k = \dfrac{7}{3}, \dfrac{8}{3}, 3$ $[0; 0; 0]$

35 $f(x) = \dfrac{5}{x^k}$ $k = -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}$ $[+\infty; 5; 0]$