

LABORATORIO DI MATEMATICA

LE DERIVATE CON DERIVE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Calcoliamo le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ nei suoi punti di ascissa $-1, 1$ e 3 .

Tracciamo poi il grafico della funzione e delle tangenti.

La funzione e la sua derivata

- Usiamo *Inserisci_Testo* per scrivere il titolo del lavoro (figura 1).
- Diamo *Crea_Espressione*, e nella riga di editazione digitiamo l'espressione della funzione $x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ e con OK la inseriamo nella #1.
- Per ottenere la derivata della funzione applichiamo il comando *Calcola_Derivata*. Nella finestra di dialogo che appare confermiamo l'ordine di derivazione, 1, e la variabile, x .
- Usciamo con *Semplifica*. Nella #2 appare l'impostazione della derivata e nella #3 la derivata stessa.
- Diamo un nome alla funzione digitando nella riga di editazione $F(x) :=$ e importando con F3 dalla #1 l'espressione della funzione.
- Operiamo in modo analogo per dare il nome $D(x)$ alla derivata.

Le tangenti al grafico di una funzione

$$\begin{aligned} \#1: & x^3 - 4x^2 - 3x + 2 \\ \#2: & \frac{d}{dx} (x^3 - 4x^2 - 3x + 2) \\ \#3: & 3x^2 - 8x - 3 \\ \#4: & F(x) := x^3 - 4x^2 - 3x + 2 \\ \#5: & D(x) := 3x^2 - 8x - 3 \end{aligned}$$

▲ Figura 1 La funzione e la sua derivata.

La formula per la retta tangente e le sue applicazioni

- Scriviamo e inseriamo nella #6 la formula per ottenere l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione (figura 2).
- La applichiamo usando il comando *Semplifica_Sostituisci variabili*. Nella finestra di dialogo ignoriamo la proposta di sostituzione della x e nel campo di sostituzione della a digitiamo 1 e usciamo con OK. Nella #7 appare la semplice sostituzione.
- Diamo *Semplifica_Sviluppa* ottenendo nella #8 l'equazione della prima tangente.
- Operiamo similmente per ottenere le altre due equazioni, come vediamo nella #10 e nella #12.

$$\begin{aligned} \#6: & y = D(a) \cdot (x - a) + F(a) \\ \#7: & y = D(-1) \cdot (x - (-1)) + F(-1) \\ \#8: & y = 8x + 8 \\ \#9: & y = D(1) \cdot (x - 1) + F(1) \\ \#10: & y = 4 - 8x \\ \#11: & y = D(3) \cdot (x - 3) + F(3) \\ \#12: & y = -16 \end{aligned}$$

▲ Figura 2 Le equazioni delle tangenti.

I punti di tangenza

- Per rendere note al sistema le coordinate dei punti di tangenza, digitiamo $[[-1, F(-1); 1, F(1); 3, F(3)]]$ e diamo INVIO (figura 3).
- Sulla #13 applichiamo *Semplifica_Base* per vedere nella #14 le coordinate dei tre punti di tangenza.

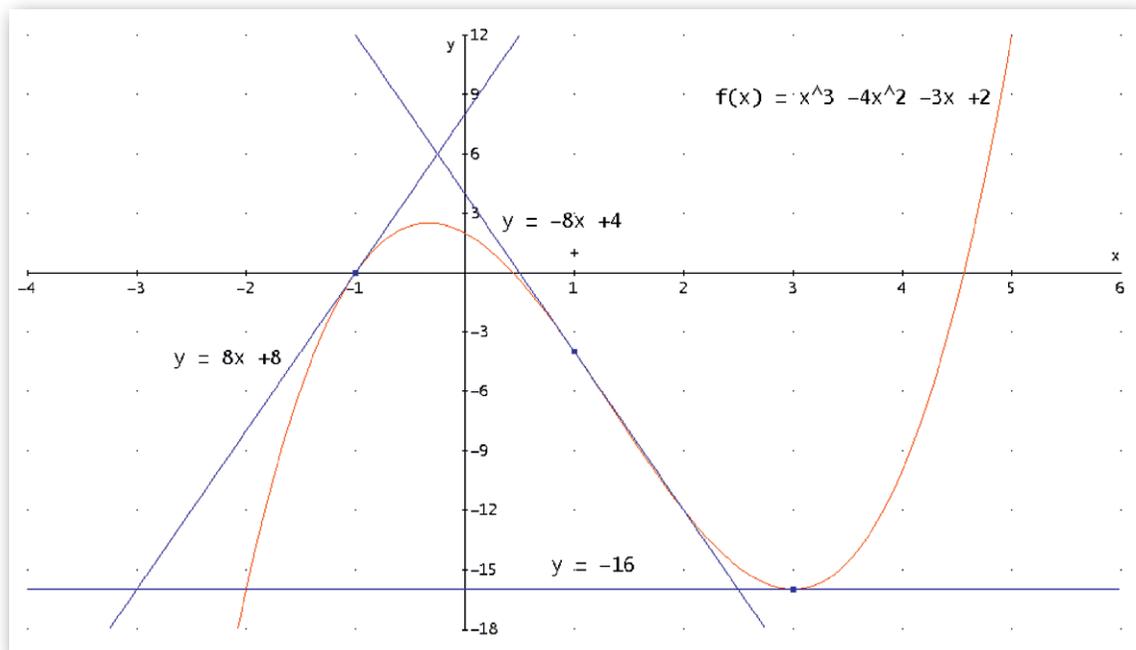
$$\begin{aligned} \#13: & \begin{bmatrix} -1 & F(-1) \\ 1 & F(1) \\ 3 & F(3) \end{bmatrix} \\ \#14: & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & -16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

▶ Figura 3 Le coordinate dei punti di tangenza.

Il grafico

Per costruire il grafico richiesto sfruttiamo gli strumenti grafici di Derive.

- Tracciamo la funzione in rosso e le tangenti e i punti di tangenza in blu.
- Scriviamo le etichette.
- Inquadrriamo la zona del piano cartesiano, scegliendo -4 (il minimo), 6 (il massimo) e 10 (il numero delle tacche), per l'asse orizzontale, e -18 , 12 e 10 , per l'asse verticale, nei campi di *Massimo/minimo* del comando *Imposta_Intervallo del Grafico*.
- Al termine delle operazioni vediamo il grafico di figura 4.



▲ Figura 4 Il grafico della funzione e delle tangenti nei punti di ascissa -1 , 1 e 3 .

Esercitazioni

Il calcolo delle derivate

Calcola le derivate dei primi due ordini delle seguenti funzioni, applicando le regole di derivazione. Svolgi poi la verifica con Derive e confronta i risultati ottenuti.

1 $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 6$ $[g'(x) = 3x^2 - 6x + 2; g''(x) = 6x - 6]$

2 $h(x) = \frac{3x}{x-1}$ $\left[h'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}; h''(x) = \frac{6}{(x-1)^3} \right]$

3 $r(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x - 3}$ $\left[r'(x) = -\frac{7x + 5}{2(x-3)^2 \sqrt{x^2 + x + 1}}; r''(x) = \frac{28x^3 + 51x^2 + 30x + 47}{4(x-3)^3 \sqrt{(x^2 + x + 1)^3}} \right]$

4 $s(x) = \frac{xe^{x-1}}{x+1}$ $\left[s'(x) = \frac{e^{x-1}(x^2 + x + 1)}{(x+1)^2}; s''(x) = \frac{xe^{x-1}(x^2 + 2x + 3)}{(x+1)^3} \right]$

$$5 \quad l(x) = (x^2 + 1)\ln(x + 1) \quad \left[l'(x) = 2x\ln(x + 1) + \frac{x^2 + 1}{x + 1}; l''(x) = 2\ln(x + 1) + \frac{3x^2 + 4x - 1}{(x + 1)^2} \right]$$

$$6 \quad c(x) = \sin^2 x + 2x \cos x \quad [c'(x) = \cos x(2 \sin x + 2) - 2x \sin x; c''(x) = 4 \cos^2 x - 2x \cos x - 4 \sin x - 2]$$

L'equazione della retta tangente al grafico di una funzione

Risolvi i seguenti problemi svolgendo i calcoli analitici sul quaderno.

Con l'aiuto di Derive controlla le operazioni svolte.

Per ogni problema costruisci il relativo grafico centrato, le tangenti trovate, i punti di tangenza evidenziati e alcune didascalie.

Determina le equazioni delle tangenti al grafico delle seguenti funzioni nei punti a fianco indicati

$$7 \quad f(x) = -x^2 - 4x \quad x_1 = -3, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -1. \quad [y = 2x + 9; y = 4; y = -2x + 1]$$

$$8 \quad f(x) = -x^3 + 4x \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2. \quad [y = -8x - 16; y = 4x; y = -8x + 16]$$

$$9 \quad f(x) = \sin x \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \pi. \quad [y = x; y = 1; y = -x + \pi]$$

$$10 \quad f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2. \quad \left[y = 2x + 7; y = 2x - 1; y = \frac{2}{9}x - \frac{1}{9} \right]$$

$$11 \quad \text{Trova le equazioni delle tangenti al grafico della funzione } f(x) = (x-1)(x-3)^2 \text{ nei punti in cui incontra la retta } y = x - 1. \quad [y = 4x - 4; y = -x + 3; y = 7x - 25]$$

$$12 \quad \text{Determina le equazioni delle tangenti al grafico della funzione } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \text{ nei punti in cui incontra gli assi cartesiani.} \quad [y = -x - 1; y = -1; y = x - 1]$$

$$13 \quad \text{Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione } f(x) = \frac{4 - x^3}{x^2} \text{ parallela alla retta } y = 7x. \quad [y = 7x + 12]$$

$$14 \quad \text{Determina le equazioni delle tangenti al grafico della funzione } f(x) = x^4 - 9x^2 \text{ nei punti in cui incontra gli assi cartesiani.} \quad [y = -54(x + 3); y = 0; y = 54(x - 3)]$$

$$15 \quad \text{Determina l'equazione della tangente al grafico della funzione } f(x) = \frac{10}{x^2} - \frac{x}{2} \text{ perpendicolare al suo asintoto obliquo.} \quad \left[y = 2x + \frac{15}{2} \right]$$