LABORATORIO DI MATEMATICA

GLI INTEGRALI INDEFINITI CON EXCEL

ESERCITAZIONE GUIDATA

Costruiamo un foglio che, dopo aver ricevuto i valori dei coefficienti a, b, c, d della funzione $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (con $c \neq 0$) e le coordinate di un punto $P(x_P; y_P)$, determini il dominio di $f(x)$ e trovi $g(x)$, l'eventuale primitiva di $f(x)$ passante per P.
Nel foglio determiniamo poi per verifica alcuni valori di $g'(x)$ e li confrontiamo con quelli di $f(x)$.
Proviamo il foglio con $a = 1$, $b = -3$, $c = 1$, $d = 4$ e $P(1; -7 \ln 5)$.

L'analisi del problema

Osserviamo che, se $c \neq 0$, $f(x)$ è una funzione razionale fratta con il dominio dato da:

$$\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}.$$

Per integrare la funzione, raccogliamo $\frac{a}{c}$ e al numeratore aggiungiamo e togliamo $\frac{d}{c}$:

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx = \frac{a}{c}\int \frac{x + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} + \frac{b}{a}}{x + \frac{d}{c}}\,dx.$$

Decomponiamo poi la frazione, semplifichiamo e integriamo:

$$\frac{a}{c}\int\left(1 + \frac{bc-ad}{a(cx+d)}\right)dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + \text{cost}.$$

Fra tutte le primitive, determiniamo $g(x)$ imponendo la condizione di passaggio per P e individuando il valore della costante indeterminata:

$$\text{cost} = y_P - \frac{a}{c}x_P - \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx_P + d|.$$

Per calcolare con Excel i valori della derivata di $g(x)$ applichiamo la formula $g'(x) \simeq \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$, con h «sufficientemente piccolo».

La costruzione del foglio

- Scriviamo delle didascalie e mettiamo dei bordi alle celle B3, D3, B5, D5, B7 e D7 per indicare dove immettere i valori dei coefficienti di $f(x)$ e le coordinate del punto P.
- Scriviamo nel foglio i simboli degli operatori di $g(x)$ (noti dall'analisi del problema) a fianco delle celle nelle quali vengono elaborati i corrispondenti coefficienti numerici (figura 1).
- Scriviamo = SE(B5 = 0; "Il coefficiente in B5 deve essere diverso da 0"; "=") in G3 per il controllo del coefficiente c, = SE(B5 = 0; ""; − D5/B5) in J5 per stabilire il dominio di $f(x)$, = SE(B7 = J5; "Il punto P non è accettabile"; "=") in G7 per il controllo del punto P.
- Calcoliamo i coefficienti della primitiva $g(x)$ rispettivamente con le formule = B3/B5 in B9, = (B5*D3 − B3*D5)/B5^2 in D9, = B5 in F9, = D5 in H9.
- Determiniamo la costante cost scrivendo
= D7 − B3/B5*B7 − (B5*D3 − B3*D5) / B5^2 * LN(ASS(B5 * B7 + D5)) in J9.

Il caso proposto dal problema

- Proviamo il foglio immettendo 1 in B3, -3 in D3, 1 in B5 e 4 in D5, i coefficienti di $f(x)$ e 1 in B7 e $= -$ 7*LN(5) in D7, le coordinate di P. Excel calcola i coefficienti della primitiva $g(x)$ e li mostra come in figura 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Gli integrali indefiniti con Excel										
2											
3		1	* x +	-3			=				
4	f(x) =	--									
5		1	* x +	4			Il D di f(x) è R -		{	-4	}
6											
7	P(	1	;	-11,2661	)		=				
8											
9	g(x) =	1	* x +	-7	* ln |	1	*x +	4	| +	-1	

▲ **Figura 1** Il foglio con la funzione $f(x)$ e una sua primitiva $g(x)$.

La verifica

- Per svolgere la verifica proposta dal problema richiediamo gli estremi x_1 e x_2 di un intervallo I, controlliamo che I appartenga al dominio di $f(x)$, facciamo variare x in I e calcoliamo i corrispondenti valori di $g'(x)$ e di $f(x)$.
- Indichiamo dove immettere gli estremi x_1 e x_2 di I e l'incremento h inserendo delle didascalie e mettendo dei bordi alle celle B11, B13 e B19.
- Controlliamo gli estremi di I, scrivendo = SE(B11 ≤ B13; SE(O(B11 > J5; B13 < J5); "I appartiene al dominio di f(x)"; "I non appartiene al dominio di f(x)"); "Gli estremi di I non sono corretti") in A15.
- Determiniamo il passo di x con la formula = (B13 − B11)/10 in B17.
- Per ottenere i valori di:
  a) x, scriviamo = B11 in F12, = F12 + B17 in F13 e la copiamo sino alla F22;
  b) $g'(x)$, scriviamo = (B9*(F12 + B19) + D9*LN(ASS(F9*(F12 + B19) + H9)) − (B9*F12 + D9*LN(ASS(F9*F12 + H9)))) / B19 in H12 e la copiamo sino alla H22;
  c) $f(x)$, scriviamo = (B3*F12 + D3) / (B5*F12 + D5) in J12 e la copiamo fino alla J22.
- Facciamo una prova immettendo -1 in B11, 7 in B13 e 0,001 in B19 (figura 2). Notiamo che i valori di $g'(x)$ si discostano di poco da quelli di $f(x)$. Possiamo migliorare l'approssimazione scegliendo un valore più piccolo per h.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
10											
11	x1 =	-1				x		g'(x)		f(x)	
12						-1		-1,33294		-1,33333	
13	x2 =	7				-0,2		-0,84186		-0,84211	
14						0,6		-0,52157		-0,52174	
15	I appartiene al dominio di f(x)					1,4		-0,29618		-0,2963	
16						2,2		-0,12894		-0,12903	
17	p =	0,8				3		7,14E-05		0	
18						3,8		0,102622		0,102564	
19	h =	0,001				4,6		0,186094		0,186047	
20						5,4		0,255359		0,255319	
21						6,2		0,313759		0,313725	
22						7		0,363665		0,363636	
23											

▲ **Figura 2** Il foglio con i valori di $g'(x)$ e di $f(x)$ a confronto per verifica.

Esercitazioni

Per ognuno dei casi seguenti, dopo aver determinato sul quaderno l'integrale indefinito della $f(x)$, usalo all'interno di un foglio, che richieda:

a) i valori dei coefficienti della funzione $f(x)$, rifiutando il valore 0 per il coefficiente a;
b) le coordinate di un punto $P(x_0; y_0)$;

e sfrutti tali valori per:

c) stabilire il periodo T della $f(x)$;
d) determinare i coefficienti della primitiva $g(x)$ di $f(x)$ passante per P;
e) calcolare alcuni valori di $g'(x)$ con procedimento numerico per confrontarli con i valori di $f(x)$ corrispondenti alle medesime x (suggerimento: si ha $g'(x) \simeq \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$ per h «piccolo»);
f) trovare, se esistono, i punti richiesti per il grafico di $g(x)$ nel periodo $(0; T)$;
g) tracciare, a richiesta, i grafici di $f(x)$, di $g'(x)$, ottenuta numericamente, e di $g(x)$ nel periodo $(0; T)$ del medesimo riferimento cartesiano.

Per ognuno dei casi seguenti, prova il foglio con i dati indicati a fianco.

1 $f(x) = a\cos(bx)$, le intersezioni con la retta $y = \frac{1}{4}$. Dati di ingresso: $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$ e $P\left(\pi; \frac{1}{2}\right)$.

$\left[T = 4\pi;\ g(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right);\ \left(1{,}0472; \frac{1}{4}\right), \left(5{,}2399; \frac{1}{4}\right)\right]$

2 $f(x) = a\operatorname{sen}(bx + c)$, le intersezioni con l'asse x. Dati di ingresso: $a = -2$, $b = 2$, $c = \frac{\pi}{3}$ e $P\left(\frac{\pi}{3}; -1\right)$.

$\left[T = \pi;\ g(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right);\ (0{,}2618; 0), (1{,}8326; 0)\right]$

3 $f(x) = a\operatorname{sen}(cx) + b\cos(cx)$, le intersezioni con l'asse x. Dati di ingresso: $a = -2$, $b = 1$, $c = 1$ e $P\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

$[T = 2\pi;\ g(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos x - 2;\ (0{,}6435; 0), (1{,}5708; 0)]$

4 $f(x) = a\operatorname{sen}(bx)$, il punto di massimo. Dati di ingresso: $a = 2$, $b = 3$ e $P\left(\frac{\pi}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

$\left[T = \frac{2\pi}{3};\ g(x) = -\frac{2\cos(3x)}{3} - 1;\ (1{,}0472; -0{,}3333)\right]$

5 $f(x) = a\cos(b\pi x)$, il punto di minimo. Dati di ingresso: $a = 4$, $b = 1$ e $P\left(\frac{1}{2}; \frac{4}{\pi}; +1\right)$.

$\left[T = 2;\ g(x) = \frac{4\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} + 1;\ (1{,}500; -0{,}2732)\right]$