LABORATORIO DI MATEMATICA
LE FUNZIONI DI DUE VARIABILI CON DERIVE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Le quadriche sono superfici le cui equazioni sono di secondo grado in x, in y e in z. Con Derive tracciamo il grafico di alcune di esse, per esempio dell'ellissoide di equazione:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Tracciamo poi il grafico del paraboloide di equazione

$$z = x^2 - y^2$$

e di alcune curve di livello ottenute tagliando la superficie del paraboloide con piani paralleli al piano $z = 0$ e piani paralleli al piano di equazione $y = 0$.
Tracciamo poi il grafico dei dati e dei risultati.

L'elissoide

- Con *Crea_Espressione* digitiamo l'equazione dell'ellissoide e la inseriamo nella #1 (figura 1).
- Esplicitiamo la z con *Risolvi_Espressione*.
- Scriviamo dentro un'istruzione IF l'equazione della parte dell'ellissoide che sta sopra al piano xy e la inseriamo nella #4.
- Impostiamo la medesima istruzione per la parte inferiore nella #5.
- Entriamo in *Finestra_Grafica 3D*, dove diamo *Opzioni_Semplifica prima di tracciare il grafico* e poi facciamo clic su *Traccia*, ottenendo il grafico della parte superiore dell'ellissoide (figura 2).

L'ellissoide

#1: $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$

#2: $\mathrm{SOLVE}\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1,\ z\right)$

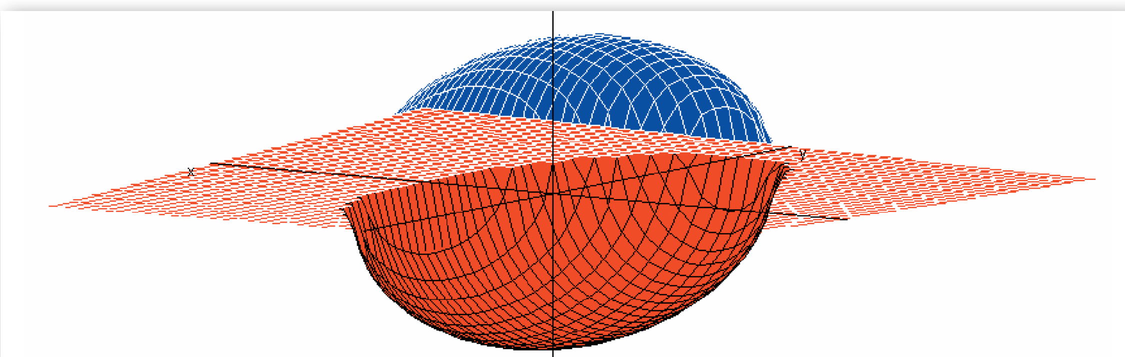
#3: $z = -\sqrt{(-4\cdot x^2 - y^2 + 4)} \vee z = \sqrt{(-4\cdot x^2 - y^2 + 4)}$

#4: $\mathrm{IF}(-4\cdot x^2 - y^2 + 4 \geq 0,\ -\sqrt{(-4\cdot x^2 - y^2 + 4)},\ 0)$

#5: $\mathrm{IF}(-4\cdot x^2 - y^2 + 4 \geq 0,\ \sqrt{(-4\cdot x^2 - y^2 + 4)},\ 0)$

▲ **Figura 1** Le istruzioni per l'ellissoide.

- Ritorniamo nella zona algebrica, dove evidenziamo la #5 (figura 1), l'etichetta che contiene l'equazione della parte inferiore.
- Ritorniamo nella finestra grafica a tre dimensioni, dove diamo *Traccia* ottenendo il grafico della parte inferiore.
- Con i comandi grafici a tre dimensioni, ora, possiamo osservare l'ellissoide (figura 2).



▲ **Figura 2** L'ellissoide.

La riproduzione di questa pagina è autorizzata ai soli fini dell'utilizzo nell'attività didattica degli alunni delle classi che hanno adottato il testo.

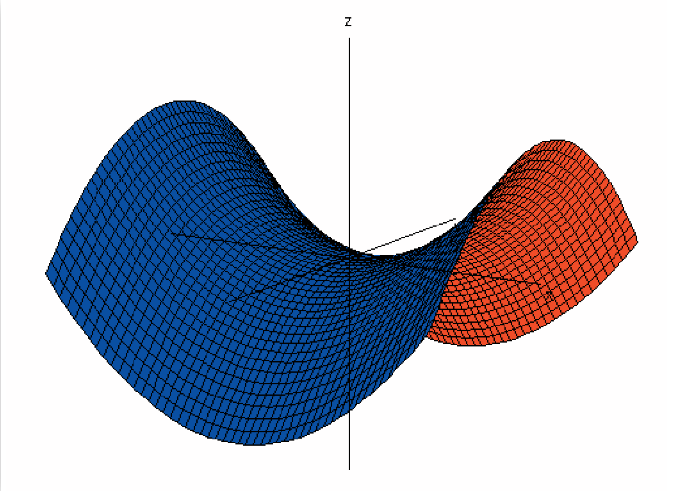
Il paraboloide iperbolico

- In un'altra sessione di lavoro (figura 3), con *Crea_Espressione* digitiamo l'equazione del paraboloide iperbolico z = x^2 + y^2 e la inseriamo nella #1.
- Entriamo in *Finestra_Grafica 3D*, dove facciamo clic su *Traccia*, ottenendo il grafico del paraboloide iperbolico, che presenta un punto di sella (figura 4).

```
Il paraboloide iperbolico
```

#1: $z = x^2 - y^2$

▲ **Figura 3** L'equazione del paraboloide.



► **Figura 4** Il paraboloide iperbolico.

Le linee di livello

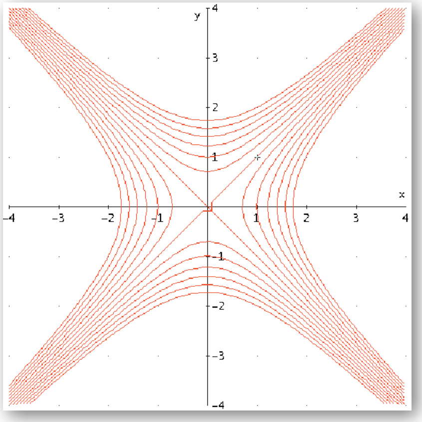
- Ritorniamo nella zona algebrica, dove scriviamo l'istruzione per ottenere le sezioni della superficie con piani paralleli al piano $z = 0$ e la inseriamo nella #2 (figura 5).
- Entriamo in *Finestra_Grafica 2D*, dove usiamo *Opzioni_Semplifica prima di tracciare il grafico* e poi facciamo clic su *Traccia*, notando in figura 6 come le linee di livello siano costituite da iperboli.

#2: $\text{VECTOR}\left(z = x^2 - y^2,\ z,\ -3,\ 3,\ \frac{1}{2}\right)$

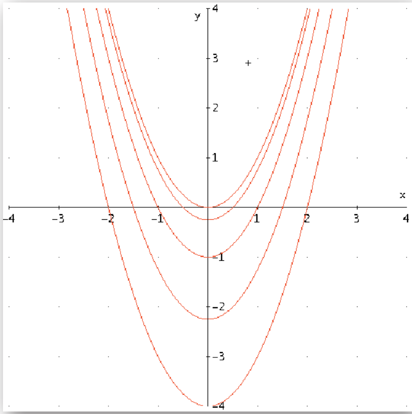
#3: $\text{VECTOR}\left(z = x^2 - y^2,\ y,\ -2,\ 2,\ \frac{1}{2}\right)$

▲ **Figura 5** Le istruzioni per le linee di livello.

- Ritorniamo nella zona algebrica, dove scriviamo l'istruzione per ottenere le sezioni della superficie con piani paralleli al piano $y = 0$.
- In ambiente grafico a due dimensioni diamo *Traccia*, notando in figura 7 come le linee di livello siano costituite da parabole.



▲ **Figura 6** Le linee di livello di direzione *xy*.



▲ **Figura 7** Le linee di livello di direzione *xz*.

La riproduzione di questa pagina è autorizzata ai soli fini dell'utilizzo nell'attività didattica degli alunni delle classi che hanno adottato il testo.

Esercitazioni

Con Derive traccia il grafico delle seguenti superfici, le cui equazioni è sono di secondo grado nelle variabili x, y e z in un riferimento tridimensionale, poi traccia i grafici bidimensionali di alcune curve di livello ottenute secando la superficie con piani paralleli al piano Oxy, al piano Oxz e al piano Oyz.

Al termine classifica la superficie esaminata.

1 $z = \frac{x^2}{4} + y^2$

2 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

3 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

4 $\frac{x^2}{4} - y^2 - z^2 = 1$

5 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

6 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Date le seguenti funzioni a due variabili determina l'equazione del piano tangente nel punto indicato.
Traccia il grafico della parte superiore della superficie in blu e la parte inferiore in rosso, quelle del piano entrambe in grigio.
(Suggerimento: per stabilire il colore di una superficie fai clic con il tasto destro del mouse sulla superficie stessa, seleziona *Modifica*, *Colore* e *Personalizzato* e, nella tavolozza che appare, scegli il colore desiderato.)

7 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4,$ $\quad T(2; 1; 1).$ $\quad [z = 4x + 2y - 9]$

8 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4},$ $\quad T(2; 2; 2).$ $\quad [z = x + y - 2]$

9 $f(x, y) = x^3 + y^3,$ $\quad T(1; 1; 2).$ $\quad [z = 3x + 3y - 4]$

10 $f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + 1},$ $\quad T(0; 0; 0).$ $\quad [z = x + y]$

Con Derive determina gli eventuali punti stazionari delle seguenti funzioni a due variabili $z = f(x, y)$, costruisci una funzione utente utile per calcolare i valori dell'hessiano di una funzione e usala per determinare il tipo dei punti stazionari.

Traccia e osserva criticamente:
- **il grafico di $f(x, y)$ nello spazio cartesiano;**
- **dieci curve di livello nella zona dei punti stazionari della $f(x, y)$ nel piano cartesiano.**

11 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ $\quad \left[(0; 0) \text{ sella}, \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) \text{ minimo}\right]$

12 $f(x, y) = \frac{x^2 - y}{y^2 + 1}$ $\quad [(0; 1) \text{ minimo}, (0; -1) \text{ sella}]$

13 $f(x, y) = x^4y - 5x^2y + 4y$ $\quad [(1; 0), (-1; 0), (2; 0), (-2; 0) \text{ punti di sella}]$

14 $f(x, y) = x^2y^2 - 3x^2y + xy^2 - 3xy - 2y^2 + 6y$

$\left[(1; 0), (1; 3), (-2; 0), (-2; 3) \text{ punti di sella}, \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \text{ massimo}\right]$

La riproduzione di questa pagina è autorizzata ai soli fini dell'utilizzo nell'attività didattica degli alunni delle classi che hanno adottato il testo.