LABORATORIO DI MATEMATICA

LE SERIE DI FOURIER CON DERIVE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Determiniamo la ridotta $s_2(x)$ di ordine 2 dello sviluppo in serie di Fourier del prolungamento periodico della funzione:

$$O(x) = \frac{1}{12}(\pi + x)x(\pi - x), \text{ con } x \in [-\pi; \pi[.$$

Per osservare l'interpolazione,

- **tracciamo nel medesimo riferimento cartesiano i grafici di $s_2(x)$ e di alcuni periodi del prolungamento di $O(x)$.**
- **calcoliamo la differenza fra alcuni valori che la $O(x)$ e la $s_2(x)$ assumono per x variabile nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.**

La funzione e la ridotta di ordine 2

- Per rendere nota la funzione $O(x)$ a Derive, scriviamo nella riga di editazione: O(x) : = 1/12 · (x + π) · x · (π − x) e con INVIO la inseriamo nella #1 (figura 1).
- Impostiamo l'applicazione dell'utilità di Derive per ricavare gli sviluppi in serie di Fourier, scrivendo l'espressione S2(x) : = FOURIER (O(x), x, − π, π, 2) e inserendola nella #2.
- Diamo *Semplifica_Base* sulla #2 ottenendo nella #3 la ridotta $s_2(x)$ con il nome S2(x).
- Scriviamo un'istruzione con degli IF annidati in modo da poter tracciare alcune onde della funzione $O(x)$: IF(− 3·π ≤ x < − π, O(x + 2·π), IF(− π ≤ x < π, O(x), IF(π ≤ x < 3·π, O(x − 2·π)))) e la inseriamo nella #4.

#1: $O(x) := \frac{1}{12}\cdot(\pi + x)\cdot x\cdot(\pi - x)$

#2: $S2(x) := FOURIER(O(x), x, -\pi, \pi, 2)$

#3: $S2(x) := SIN(x) - \frac{SIN(2\cdot x)}{8}$

#4: $IF(-3\cdot\pi \le x < -\pi, O(x + 2\cdot\pi), IF(-\pi \le x < \pi, O(x), IF(\pi \le x < 3\cdot\pi, O(x - 2\cdot\pi))))$

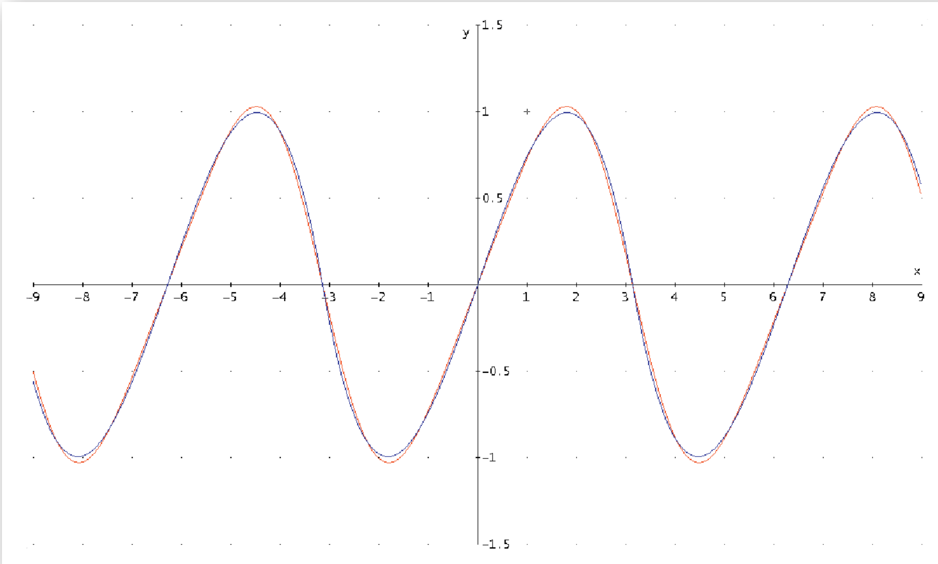
▲ **Figura 1** La funzione e la ridotta di ordine 2.

I grafici

Per costruire i grafici richiesti sfruttiamo gli strumenti grafici di Derive (figura 2).

- Per tracciare alcune onde della funzione $O(x)$, prima di entrare in ambiente grafico evidenziamo la #4.
- Nella finestra grafica con *Opzioni_Visualizzazione* scegliamo il colore rosso per la $O(x)$ e, poi, per la ridotta $s_2(x)$ il colore blu.
- Inquadriamo la zona del piano cartesiano, scegliendo − 9 (il minimo), 9 (il massimo) e 10 (il numero delle tacche), per l'asse orizzontale, e − 1,5, 1,5 e 6, per l'asse verticale, nei campi di *Massimo/minimo* del comando *Imposta_Intervallo del Grafico*.

Al termine osserviamo che, pur con un ordine basso, l'interpolazione trigonometrica è abbastanza buona.



▲ **Figura 2** I grafici.

La tabella con le differenze

Per effettuare un confronto numerico fra la funzione $O(x)$ e la funzione interpolante, costruiamo una tabella con i valori della x, della $O(x)$, della $s_2(x)$ e del valore assoluto della loro differenza.

- Scriviamo l'istruzione dell'assemblaggio di una tabella VECTOR ([x, O(x), S2(x), |O(x) − S2(x)|] x, 0, π/2, π/20) e la inseriamo nella #5 (figura 3).
- La facciamo operare con *Semplifica_Approssima*, ottenendo nella #6 una tabella di valori.

Osserviamo che gli errori di approssimazione nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sono dell'ordine di alcuni centesimi.

#5: $\text{VECTOR}\left([x,\ O(x),\ S2(x),\ |O(x) - S2(x)|],\ x,\ 0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{20}\right)$

#6:

0	0	0	0
0.1570796326	0.1288698374	0.1178073407	0.0110624967
0.3141592653	0.2558017826	0.2355438378	0.02025794477
0.471238898	0.3788579431	0.3528633754	0.02599456774
0.6283185307	0.4961004268	0.4689031877	0.02719723913
0.7853981633	0.6055913414	0.5821067811	0.02348456022
0.942477796	0.7053927944	0.6901349298	0.01525786464
1.099557428	0.7935668937	0.7898793998	0.003687493893
1.256637061	0.868175747	0.8775833597	0.00940761271
1.413716694	0.9272814619	0.9490612162	0.02177975432
1.570796326	0.9689461462	1	0.03105385373

▲ **Figura 3** La tabella con le differenze.

Esercitazioni

Utilizza Derive per risolvere i seguenti problemi. Ricava i risultati, se possibile, nella forma esatta. Quando operi in modo approssimato, richiedi al sistema di scrivere i numeri decimali con quattro cifre.

Determina lo sviluppo $s(x)$ in serie di Fourier, di indice n precisato, del prolungamento periodico delle funzioni $f(x)$ definite dalla legge e nei periodi indicati. Traccia i grafici sovrapposti della $f(x)$ e della $s(x)$. Rispondi ai quesiti posti.

1 $f(x) = \dfrac{\pi|x|}{4x}$, $x \in]-\pi; \pi]$, $\quad n = 3$.

Determina le coordinate dei punti di massimo, A e C, e di minimo, B, della $s(x)$, nell'intervallo $]0; \pi[$.
Calcola le aree S_1 e S_2 delle regioni finite di piano comprese fra l'asse x e, rispettivamente, la $f(x)$ e la $s(x)$, nell'intervallo $[0; \pi]$.

$$\left[s(x) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(x);\ A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{2}{3}\sqrt{2}\right);\ B\left(\frac{\pi}{2}; \frac{2}{3}\right);\ C\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{2}{3}\sqrt{2}\right);\ S_1 = \frac{\pi^2}{4} \text{ e } S_2 = \frac{20}{9}\right]$$

2 $f(x) = x$, $x \in]-\pi; \pi]$, $\quad n = 2$.

Determina le coordinate del punto di massimo, M, della $s(x)$, nell'intervallo $]0; \pi[$.
Calcola l'area S della regione finita di piano compresa fra $s(x)$ e la funzione $c(x) = -x(\cos x + 1)$ nell'intervallo $[0; \pi]$.

$$\left[s(x) = 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(2x);\ M\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right);\ S = \frac{\pi^2}{2} + 2\right]$$

3 $f(x) = 2x - \pi$, $x \in]0; \pi]$, $\quad n = 2$.

Determina le coordinate dei punti di minimo, N, di flesso orizzontale F, di massimo M, della $s(x)$, nell'intervallo $]0; \pi[$.

$$\left[s(x) = -\operatorname{sen}(4x) - 2\operatorname{sen}(2x);\ N\left(\frac{\pi}{6}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right);\ F\left(\frac{\pi}{2}; 0\right);\ M\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

4 $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{5\pi}{8}\cos x & \text{per } -\pi < x \leq 0 \\ \dfrac{5\pi}{8}\cos x & \text{per } 0 < x \leq \pi \end{cases}$, $\quad n = 4$.

Determina le coordinate del punto di flesso, F, della $s(x)$, nell'intervallo $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
La retta $y = \dfrac{3}{2}$, appartenente all'intervallo $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, incontrando la $s(x)$ individua infinite porzioni di piano. Determina l'area di una di esse.
Determina il valore del parametro k (con due cifre decimali) in modo che la retta $y = k$ divida la calotta sinusoidale formata dalla $s(x)$ e dal segmento OB, con $O(0; 0)$ e $B\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$, in due parti equiestese.

$$\left[s(x) = \frac{2\operatorname{sen}(4x)}{3} + \frac{5\operatorname{sen}(2x)}{3};\ F(0{,}9443; 1{,}187);\ S = 1{,}074;\ k = 1{,}59\right]$$

5 $f(x) = \dfrac{2\pi}{e^{\pi}}e^x$, $x \in]-\pi; \pi]$, $n = 2$.

Determina le coordinate del minimo N e del massimo M della $s(x)$ nell'intervallo $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
Trova i valori della $f(x)$, della $s(x)$ e della ridotta di indice dieci nel punto $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
Determina l'altezza d'onda e lo sfasamento della prima armonica (escludendo il valor medio).
Calcola la media dei limiti destro e sinistro della funzione per x tendente a π e il valore della ridotta di indice venti nel punto $x_0 = \pi$.

$$\left[-e^{-2\pi}\left(\frac{2\cos(2x)}{5} - \frac{4\operatorname{sen}(2x)}{5} - \cos x + \operatorname{sen} x + 1\right) + \frac{2\cos(2x)}{5} - \frac{4\operatorname{sen}(2x)}{5} - \cos x + \operatorname{sen} x + 1;\right.$$
$$N(0{,}5752; 0{,}1375);\ M(2{,}522; 3{,}275);\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1{,}306,\ s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1{,}597,\ s_{10}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1{,}396;$$
$$\left.\text{altezza} = 0{,}9981,\ \alpha = -0{,}7854;\ \text{media} = 6{,}28318,\ s_{20}(\pi) = 3{,}050\right]$$

6 $f(x) = |\operatorname{sen} x|,\ x \in]-\pi; \pi],\quad n = 2.$

Trova le differenze (espresse in millesimi) fra i valori, calcolati nel punto $x_0 = \frac{\pi}{6}$, fra la funzione $f(x)$ e, rispettivamente, la $s(x)$, la ridotta della serie di Fourier di indice due, quella di indice quattro, quella di indice dieci e quella di indice venti.

$\left[s(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4\cos(2x)}{3\pi};\ \frac{76}{1000},\ \frac{33}{1000},\ -\frac{7}{1000},\ \frac{3}{1000}\right]$

7 $f(x) = |x|,\ x \in]-\pi; \pi],\quad n = 1.$

Trova le coordinate dei punti A, B, C, intersezioni fra la $f(x)$ e la $s(x)$ nell'intervallo $]0; \pi[$.

$\left[s(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4\cos x}{\pi};\ A(0{,}3961; 0{,}3961);\ B\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),\ C(2{,}745; 2{,}745)\right]$

Determina lo sviluppo $r(x)$ della serie di Fourier, arrestato al termine di indice due, delle seguenti funzioni $f(x)$, con il periodo indicato (diverso da 2π o da π). Traccia i grafici sovrapposti della $f(x)$ e della $r(x)$. Rispondi ai quesiti posti.

8 $f(x) = x(1-x),\ x \in]-1; 1].$

Determina l'altezza d'onda e lo sfasamento della prima armonica.

$\left[r(x) = -\frac{\cos(2\pi x)}{\pi^2} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi x)}{\pi} + \frac{4\cos(\pi x)}{\pi^2} + \frac{2\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} - \frac{1}{3};\ C = 0{,}5,\ \alpha = 0{,}5691\right]$

9 $f(x) = x(1-x),\ x \in]0; 1].$

Trova nell'intervallo $]0; 1]$ le coordinate dei punti di massimo, M, della $f(x)$, e R, della $r(x)$.

$\left[r(x) = -\frac{\cos(4\pi x)}{4\pi^2} - \frac{\cos(2\pi x)}{\pi^2} + \frac{1}{6};\ M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right),\ R\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4\pi^2} + \frac{1}{6}\right)\right]$

10 $f(x) = 1 - x^2,\ x \in]-1; 1].$

Trova nel punto $x = \frac{1}{2}$ la differenza fra i valori della $f(x)$ e della $r(x)$.

$\left[r(x) = -\frac{\cos(2\pi x)}{\pi^2} + \frac{4\cos(\pi x)}{\pi^2} + \frac{2}{3};\ d = -0{,}01799\right]$

11 $f(x) = x - x^3,\ x \in]-1; 1].$

Calcola nell'intervallo $[0; 1]$ gli integrali definiti della $f(x)$ e della $r(x)$.

$\left[r(x) = \frac{12\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi^3} + \frac{3\operatorname{sen}(2\pi x)}{2\pi^3};\ I_f = \frac{1}{4} = 0{,}25,\ I_r = \frac{24}{\pi^4} \simeq 0{,}2464\right]$

12 Determina il valore del parametro m in modo che il valor medio della funzione $f(x) = mx$, $x \in]0; \pi]$ valga, rispettivamente, π, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$.

$\left[m = 2,\ m = \frac{1}{\pi},\ m = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right]$

13 Determina il parametro a con $0 < a < \pi$, in modo che il valor medio della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per} \quad 0 < x \le a \\ a & \text{per} \quad a < x \le \pi \end{cases}$$

nell'intervallo $[0; \pi]$ sia $\frac{1}{2}$. Se il parametro a vale $\frac{\pi}{2}$, quanto è il valor medio della funzione? Qual è il massimo che può assumere il valor medio nell'intervallo stabilito?

$\left[a \simeq 0{,}5477,\ vm \simeq 1{,}178,\ vm = \frac{\pi}{2}\right]$

14 Determina i valori del parametro k in modo che lo sviluppo di Fourier della funzione

$$f(x) = k\frac{|x|!}{x}, \qquad -\pi < x \leq \pi,$$

- abbia la prima armonica di altezza d'onda 3;
- dia come somma delle prime due armoniche una funzione che passa per il punto $P\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$;
- dia come somma delle prime due armoniche una funzione con l'ordinata del minimo in $\frac{\pi}{2}$ uguale a 3.

$\left[k = \frac{3\pi}{4}; k = \pi; k = \frac{3\pi}{4}\right]$

15 Costruisci due utilità, una per ottenere un prolungamento pari (solo coseni) e una per ottenere un prolungamento dispari (solo seni) in serie di Fourier di una funzione $f(x)$ periodica definita in un periodo. (Nel risultato trovi un esempio di definizione delle due procedure.)

$$\left[\mathrm{SOLO\_COSENI}(y, t, t1, t2, n) := \frac{2}{t2 - t1} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \int_{t1}^{t2} y\, dt + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{COS}\left(\frac{k \cdot \pi \cdot t}{t2 - t1}\right) \cdot \int_{t1}^{t2} y \cdot \mathrm{COS}\left(\frac{k \cdot \pi \cdot t}{t2 - t1}\right) dt\right);\right.$$

$$\left.\mathrm{SOLO\_SENI}(y, t, t1, t2, n) := \frac{2}{t2 - t1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathrm{SIN}\left(\frac{k \cdot \pi \cdot t}{t2 - t1}\right) \cdot \int_{t1}^{t2} y \cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{k \cdot \pi \cdot t}{t2 - t1}\right) dt\right]$$

Applica le utilità costruite alle seguenti funzioni definite nel periodo indicato a fianco e ricava sia lo sviluppo di Fourier in soli coseni $c(x)$, sia lo sviluppo in soli seni $s(x)$, entrambi arrestati al termine di indice due. Traccia i grafici delle funzioni $f(x)$, $c(x)$ e $s(x)$.

16 $f(x) = x, \qquad x \in \,]0; \pi]$. $\left[-\frac{4\cos x}{\pi} + \frac{\pi}{2}; -\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x\right]$

17 $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad x \in \,]0; \pi]$. $\left[\frac{2}{\pi} - \frac{4\cos(2x)}{3\pi}; \operatorname{sen} x\right]$

18 $f(x) = \begin{cases} x & \text{per } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{per } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$ $[-0{,}1592\cos(2x) - 0{,}3183\cos x + 1{,}1781; -0{,}25\operatorname{sen}(2x) + 0{,}8183\operatorname{sen} x]$

19 Costruisci un'utilità per ottenere il valor medio di una funzione definita in un intervallo, dove essa è definita.

$\left[\mathrm{VM}(y, t, t1, t2) := \frac{1}{t2 - t1} \cdot \int_{t1}^{t2} y\, dt\right]$

20 Applica l'utilità costruita nell'esercizio precedente per determinare il valor medio delle seguenti funzioni negli intervalli indicati a fianco.

a) $f(x) = |x|, \qquad x \in \,]-\pi; \pi]$. $\left[vm = \frac{\pi}{2}\right]$

b) $f(x) = |x|, \qquad x \in \,]-1; 1]$. $\left[vm = \frac{1}{2}\right]$

c) $f(x) = 3x^2, \qquad x \in \,]-1; 1]$. $[vm = 1]$

d) $f(x) = x^2 - 1, \qquad x \in \,]-1; 1]$. $\left[vm = -\frac{2}{3}\right]$

e) $f(x) = x(\pi - x), \qquad x \in \,]-\pi; \pi]$. $\left[vm = -\frac{\pi^2}{3}\right]$

f) $f(x) = 1 - x^2, \qquad x \in \,]-1; 1]$. $\left[vm = \frac{2}{3}\right]$

g) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}\right), \qquad x \in \,]-\pi; \pi]$. $[vm = 0]$