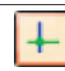
LABORATORIO DI MATEMATICA
LA CIRCONFERENZA CON WIRIS

Gli operatori della geometria analitica
Il sistema Wiris mette a disposizione degli utenti diversi operatori utili per risolvere svariati problemi di matematica. Per quel che riguarda la geometria analitica, ne troviamo alcuni direttamente nella *palette* di *Geometria*, per esempio:

per ottenere…	usiamo la parola chiave con gli argomenti	o il pulsante
l'equazione di una retta parallela a una retta di coefficiente m per il punto $(x_0; y_0)$,	$parallela(punto(x_0, y_0), m)$	
l'equazione di una retta perpendicolare a una retta di coefficiente m per il punto $(x_0; y_0)$,	$perpendicolare(punto(x_0, y_0), m)$	
le coordinate delle intersezioni fra due curve di equazioni *equaz1* ed *equaz2*	$intersezione(equaz1, equaz2)$	

e altri possiamo batterli dalla tastiera:

per ottenere…	battiamo la parola chiave con gli argomenti
la distanza fra due punti,	$distanza(punto(x_1, y_1), punto(x_2, y_2))$
la distanza fra un punto e una retta,	$distanza(punto(x_1, y_1), retta(punto(x_2, y_2), punto(x_3, y_3)))$
le coordinate del punto medio,	$punto\_medio(punto(x_1, y_1), punto(x_2, y_2))$

Per conoscerne altri ancora possiamo consultare il manuale in linea.

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Wiris determiniamo l'equazione della circonferenza *crf*
- **passante per il punto P di ascissa 12, situato nel IV quadrante a distanza $2\sqrt{37}$ dall'origine;**
- **tangente alla retta t nel punto T. La retta t interseca gli assi cartesiani nei punti $A(-4; 0)$ e $B(0; 2)$, e il punto T si trova nel I quadrante ed è estremo del segmento BT, che ha una lunghezza doppia di quella del segmento AB.**

Tracciamo il grafico degli elementi del problema.

Il percorso risolutivo
Nel quaderno scriviamo lo schema risolutivo del problema.

Determiniamo	sapendo che:
l'ordinata del punto P,	…l'ascissa di P e la distanza di P dall'origine sono dati;
l'equazione della retta t,	…t passa per i punti A e B noti;
le coordinate del punto T,	…T appartiene alla retta t trovata e si ha $\overline{BT} = 2 \cdot \overline{AB}$;
l'equazione della retta p,	…p è perpendicolare alla retta t e passa per T;
l'equazione della circonferenza *crf*,	…*crf* ha il centro sulla retta p e passa per T e per P.

I passaggi con Wiris

• Entriamo poi in ambiente Wiris per svolgere i calcoli, in modo interattivo. Costruiamo una sessione di lavoro rimanendo sempre nello stesso blocco, per non dover riportare le varie assegnazioni.
• All'inizio di ogni gruppo di passaggi del percorso risolutivo, attiviamo il comando *commento* del menu *Edita* e scriviamo nella riga del blocco, resa inattiva, l'obiettivo dei passaggi stessi.

Il punto *P* (figura 1)

• Assegniamo l'ascissa nota di *P* alla variabile *xP*, seguita dal simbolo **;** (punto e virgola). Facciamo ciò tutte le volte che desideriamo memorizzare un dato o svolgere un'elaborazione senza l'esigenza di vederne il risultato.
• Impostiamo con l'operatore *risolvere* l'equazione, che traduce la relazione della distanza di *P* dall'origine.
• Nello scrivere il testo dell'equazione importiamo dal menu *Operazioni* i modelli per la radice e per la potenza.
• La risolviamo con un clic sul pulsante *Calcol*a.
• Concludiamo con l'assegnazione alla lettera *P*, nella riga successiva, delle coordinate di *P* per mezzo della parola chiave *punto*. All'interno della quale scriviamo l'ascissa nota e l'ordinata, scelta fra le due trovate da Wiris, in modo che il punto si trovi nel IV quadrante.

Il punto P

$\mathrm{xP} = 12;$

$\mathrm{risolvere}\left(\sqrt{\mathrm{xP}^2+\mathrm{yP}^2} = 2\sqrt{37}\right) \rightarrow \{\{\mathrm{yP}=-2\}, \{\mathrm{yP}=2\}\}$

$\mathrm{P} = \mathrm{punto}(12, -2);$

◄ **Figura 1**

La retta *t* (figura 2)

• Rendiamo noti a Wiris i punti *A* e *B* attraverso l'operatore *punto* applicato due volte con le rispettive coordinate.
• Impostiamo l'operatore *retta* (o digitandolo da tastiera o richiamandolo dal menu *Geometria*) con i nomi dei due punti *A* e *B* come argomenti.
• Facciamo clic sul pulsante *Calcola*, ottenendo l'equazione della retta *t*.

La retta t

$\mathrm{A} = \mathrm{punto}(-4, 0);$

$\mathrm{B} = \mathrm{punto}(0, 2);$

$\mathrm{t} = \mathrm{retta}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \rightarrow \mathrm{y}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{x}+2$

◄ **Figura 2**

Il punto *T* (figura 3)

• Assegniamo il nome *dAB* alla misura del segmento *AB* e ne impostiamo il calcolo con l'operatore *distanza*, contenente come argomenti i punti *A* e *B*.
• Assegniamo il nome *dBT* alla relazione che rappresenta la distanza di *T* da *B*, in funzione delle coordinate x_T e y_T di *T*, ancora incognite.
• Attiviamo l'operatore *risolvere sistema*, dal menu *Operazioni*.
• Digitiamo 2 nella finestra di dialogo, che richiede il numero delle equazioni, e usciamo con *Accetta*, vedendo apparire il modello del sistema a due equazioni.
• Carichiamo i campi per le equazioni rispettivamente con le relazioni $dBT = 2dAB$ e $y_T = \frac{1}{2}x_T + 2$, quest'ultima basata sul fatto che il punto *T* appartiene alla retta *t*.
• Battiamo *Calcola*, ricavando le coordinate di due punti.
• Assegniamo alla lettera *T* le coordinate corrispondenti al punto appartenente al I quadrante.

Il punto T

dAB = distanza(A, B);

$$dBT = \sqrt{(xT-0)^2+(yT-2)^2};$$

$$\text{risolvere}\begin{cases} dBT = 2\cdot dAB \\ yT = 1/2\cdot xT+2 \end{cases} \rightarrow \{\{xT=-8,yT=-2\},\{xT=8,yT=6\}\}$$

T = punto(8, 6);

◀ **Figura 3**

La retta *P* (figura 4)

• Per avere una relazione che leghi i coefficienti della circonferenza *crf*, cerchiamo la retta p, perpendicolare in T alla tangente t alla circonferenza *crf*, quindi passante per il centro Ω di *crf*.
• Impostiamo, pertanto, nella lettera p, l'operatore *perpendicolare* con gli argomenti t e T.
• Con *Calcola* ricaviamo l'equazione della retta p.

La retta p

$$p = \text{perpendicolare}(t, T) \rightarrow y=-2\cdot x+22$$

◀ **Figura 4**

La circonferenza *crf* (figura 5)

• In una riga assegniamo alla variabile *eq* l'equazione generica della circonferenza.
(Osserviamo che scriviamo il simbolo di uguale per effettuare l'assegnazione e quello di doppio uguale per indicare l'uguaglianza logica fra i due membri dell'equazione. Potremmo mettere il semplice simbolo di uguale in un'equazione solo se non vi fosse il rischio di interpretazione dubbia).
• Nelle righe successive assegniamo rispettivamente a *eq1*, a *eq2* e a *eq3* le equazioni nelle incognite a, b e c (i coefficienti della circonferenza), che traducono le condizioni note.
• Precisamente, in *eq1* inseriamo l'equazione che sfrutta la condizione di appartenenza del centro $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ alla retta p.
• In *eq2* inseriamo l'equazione basata sull'appartenenza di T alla circonferenza, servendoci opportunamente dell'operatore *sostituire*, come vediamo in figura 5.
• In *eq3* operiamo similmente per l'appartenenza di P alla circonferenza.
• Attiviamo *risolvere sistema*, diamo tre equazioni e all'interno del modello che appare scriviamo i nomi delle tre equazioni.
• Facciamo clic su *Calcola* ottenendo i valori dei tre coefficienti della circonferenza *crf*.
• Concludiamo con la sostituzione in *eq* dei valori trovati di a, di b e di c.

La circonferenza crf

$$eq = x^2+y^2+a\cdot x+b\cdot y+c == 0;$$

$$eq1 = -\frac{b}{2} == -2\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)+22;$$

eq2 = sostituire(sostituire(eq, x, 12), y, −2);

eq3 = sostituire(sostituire(eq, x, 8), y, 6);

$$\text{risolvere}\begin{cases} eq1 \\ eq2 \\ eq3 \end{cases} \rightarrow \{\{a=-20,b=-4,c=84\}\}$$

$$crf = \text{sostituire}(\text{sostituire}(\text{sostituire}(eq, a, -20), b, -4), c, 84) \rightarrow x^2-20\cdot x+y^2-4\cdot y+84=0$$

▲ **Figura 5**

Il grafico (figura 6)

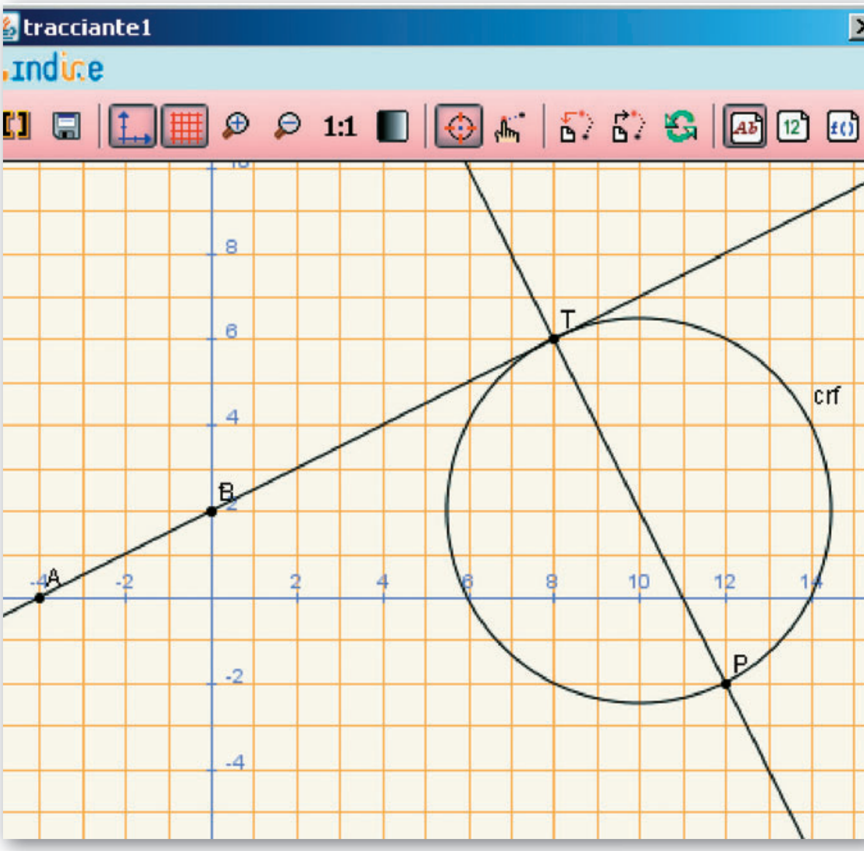
• Per tracciare il grafico, scriviamo l'operatore *tracciare* e al suo interno, come argomenti, la lista posta fra parentesi graffe degli elementi del problema.

• Scriviamo inoltre l'opzione per vedere nel grafico i nomi degli elementi del problema.

```
tracciare({P, A, B, t, T, p, crf}, {mostrare_etichetta = vero}) → tracciante1
```

▲ **Figura 6**

• Facciamo clic su *Calcola* realizzando il grafico della figura 7.



▲ **Figura 7** Il grafico con gli elementi del problema.

Esercitazioni

Per ognuno dei seguenti problemi scrivi sul quaderno uno schema risolutivo, attiva Wiris e con esso:
1. **svolgi i calcoli seguendo il percorso risolutivo stabilito;**
2. **costruisci un grafico con i dati e i risultati del problema;**
3. **opera le verifiche richieste;**
4. **quando è possibile, usa lo strumento grafico *Sposta*.**

1 Dati i punti $M(2; 3)$ e $N(-4; 5)$ determina le equazioni delle circonferenze che passano per essi e per un terzo punto P, assumendo che le coordinate di P siano $(0; 1)$, $(-2; 3)$, $(3; -2)$, $(-4; 5)$ e $(-4; 3)$.
Per verifica: in ciascuno dei casi trova il circocentro del triangolo MNP e controlla che coincida con il centro della circonferenza determinata.
[$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$; $x^2 + y^2 - 14y + 29 = 0$; $x^2 + y^2 + 5x + y - 26 = 0$, la circonferenza non si forma; $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$]

2 Determina l'area del triangolo isoscele MNP, di base MN con N di coordinate $\left(-\frac{6}{5}; -\frac{13}{5}\right)$, inscritto nella circonferenza c di equazione $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$, nel caso in cui il vertice P abbia coordinate $\left(\frac{8}{5}; \frac{11}{5}\right)$ e nel caso in cui le coordinate siano $\left(\frac{8}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.
Per verifica, determina le misure della base MN e dell'altezza AH per calcolare l'area del triangolo.
$\left[S = 4; S = \frac{1372}{625}\right]$

3 Determina l'equazione del luogo dei punti P (circonferenza di Apollonio) tali che il rapporto k delle distanze di P dai punti $A(-1; 0)$ e $B(1; 4)$ valga $\frac{1}{2}$; prova poi con $k = 3$, con $k = \frac{1}{3}$ e con $k = 1$.
Per verifica, scegli un punto qualsiasi Q della circonferenza e calcola il rapporto $\frac{AQ}{QB}$.
[$3x^2 + 3y^2 + 10x + 8y - 13 = 0$; $2x^2 + 2y^2 - 5x - 18y - 38 = 0$; $2x^2 + 2y^2 + 5x + 2y - 2 = 0$; $x + 2y - 4 = 0$, l'asse del segmento AB]

4 Dato il triangolo di vertici $A(5; -1)$, $B(-3; 3)$ e $C(-5; -7)$, determina l'equazione della circonferenza c passante per i punti medi dei lati e verifica che c passa anche per i piedi delle altezze del triangolo.
Per verifica, determina l'equazione della circonferenza che passa per i piedi delle altezze del triangolo.
[$11x^2 + 11y^2 + 24x + 26y - 72 = 0$]

5 Dati il triangolo di vertici $A(5; 3)$, $B(-2; 4)$ e $C(1; -5)$, la circonferenza c a esso circoscritta e il suo punto $P(-4; 0)$, verifica che i piedi delle perpendicolari condotte da P sui tre lati del triangolo (o sui loro prolungamenti) sono allineati.
Verifica l'allineamento dei tre piedi delle perpendicolari con altre posizioni di P su c. [$4x + 3y + 1 = 0$]

6 Determina le equazioni delle circonferenze che passano per $P(0; 2)$ e sono tangenti alle rette s e t, sapendo che:
- la retta s è parallela alla retta r di equazione $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{16}$;
- la retta t passa per R, incontro di r con l'asse x;
- il punto $C\left(\frac{6}{5}; \frac{3}{5}\right)$ appartiene sia a s sia a t.

Per verifica, determina le intersezioni fra la retta s e una delle circonferenze trovate.
[$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$; $25x^2 + 25y^2 - 26x - 268y + 436 = 0$]

7 Dato il fascio di circonferenze di equazione

$$x^2 + y^2 - (3k + 2)x + (k - 4)y + 4 = 0,$$

con Wiris:

- trova le coordinate dei punti base;
- determina i valori del parametro k corrispondente alle circonferenze che…

a) hanno area $S = \frac{5}{2}$,
b) tagliano sull'asse x una corda lunga 3,
c) sono tangenti all'asse y,
d) hanno raggio $r = 3$,
e) passano per l'origine;

- scrivi le equazioni delle circonferenze e controlla che soddisfino le caratteristiche richieste;
- tracciane il grafico nel medesimo riferimento cartesiano.

$\left[\left(\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right) \text{ e } (1; 3); k = -1 \text{ e } k = \frac{3}{5}; k = 1 \text{ e } k = -\frac{7}{3}; k = 0 \text{ e } k = 8; k = -2 \text{ e } k = \frac{8}{5}; \nexists\, k \in \mathbb{R}\right]$